Prova A

EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2025/2026
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2025/2026

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

19/10/2025

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: ______________________________________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **20 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página **20** é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

Questão 1. Nesta questão, o planeta Terra é considerado como uma esfera de raio $R = \frac{20000}{\pi}$ quilômetros. Lembre-se que a latitude varia de zero (linha do Equador) a $+90^\circ$ no polo norte e de zero a -90° (polo sul). A longitude varia de zero (meridiano que passa por Greenwich) até 360°, com longitudes crescentes para o leste. Considere a cidade de Broadus, Montana (lat. 45°, long. -105°) nos EUA e a cidade de Porto Alegre (lat. -30°, long. -51°). Suponha o sistema de coordenadas ortogonal O_x, O_y, O_z usual, com centro no centro da Terra, com o eixo O_x alinhado com o segmento que liga os polos norte e sul e com sentido positivo indo do polo sul para o polo norte. O eixo O_x passa pelo ponto da Terra de longitude zero e latitude zero. Os vetores unitários $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ têm respectivamente a direção e sentido dos eixos coordenados O_x, O_y, O_z. Considere essa posição da esfera terrestre como a inicial. Agora fixe o sistema ortogonal $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ no espaço e suponha que possamos fazer rotações livres da esfera terrestre. A linha do equador é redefinida como sendo os pontos da esfera com $z = 0$ (latitude zero), e os polos são redefinidos como a interseção do eixo O_z com ela. Por exemplo, uma rotação de 180 graus do globo terrestre em torno do eixo O_y faz com que o ponto geográfico que estava no polo norte passe para o sul e vice versa.

Para fazer as contas desta questão, adote $|\cos(45^\circ)| = 0.6$, $\sqrt{3} = 1.7$ e as distâncias em quilômetros.

(a) Faça a rotação da esfera terrestre em torno do eixo O_z de tal forma que Porto Alegre passe a ter longitude zero, mas conservando a sua latitude. Determine a nova latitude e longitude da cidade de Broadus.

(b) Determine as novas coordenadas (x, y, z) da cidade de Broadus (Basta indicar as contas usando as funções trigonométricas e o símbolo R para o raio da Terra) após a operação de rotação do item anterior.

(c) A partir da posição da esfera terrestre atingida no item anterior, faça agora uma nova rotação da esfera terrestre em torno do eixo O_y de tal forma que a cidade de Porto Alegre passe a ter latitude de -90°. Mostre a matriz de transformação linear usada para realizar a operação.

(d) Usando a matriz de transformação linear do item anterior, determine a coordenada z da nova posição da cidade de Broadus. Considere apenas a primeira casa decimal.

(e) Determine a distância entre as cidades de Porto Alegre e Broadus. A distância é entendida aqui como o menor comprimento de uma linha sobre a esfera terrestre que liga as duas cidades.

RESPOSTA ESPERADA:

(a) Para que Porto Alegre conserve a sua latitude e passe a ter longitude zero, fazemos uma rotação da esfera terrestre em torno do eixo O_z. Nesse caso, a cidade de Broadus passa a ter nova longitude de $-105 + 51$ graus. A latitude de Broadus continua a mesma, isto é, de 45 graus.

(b) As novas coordenadas da cidade de Broadus são

$$[Rcos(45)\cos(-105+51), -Rcos(45)sen(105-51), Rsen(45)]$$

(c) Trata-se de uma matriz de rotação em torno do eixo O_y de $90-30$ graus. Lembre-se que a latitude de Porto Alegre é 30 graus, então para se atingir o polo falta $90-30$ graus. A matriz pedida é dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(d) As novas coordenadas da cidade de Broadus são obtidas por

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Rcos(45)cos\,(54) \\ -Rcos(54)cos\,(54) \\ Rsen(45) \end{pmatrix}$$

A coordenada z pedida é vale 0.0, usando a primeira casa decimal.

(e) Como a nova coordenada z de Broadus é zero, a cidade se localiza agora na linha do Equador, e Porto Alegre está na posição do polo sul. Neste caso, vemos que a menor distância entre essas cidades se obtém caminhando-se por um meridiano. A distância pedida é 10000 quilômetros.

Itens do programa abordado:
Matrizes, ortogonalidade, sistemas de coordenadas, transformações lineares, matriz de uma transformação linear.

Questão 2. Considere a figura 1 que mostra duas esferas de dimensões desprezíveis ambas de massa m entre molas de constante elásticas k_1, k_2 e k_3 com $k_1 = k_2 = k_3 = k$. A figura mostra a situação em que o sistema está em equilíbrio estático. As coordenadas y_1 e y_2 fornecem os deslocamentos a partir das posições de equilíbrio das massas mostradas.

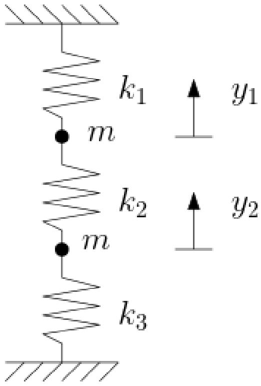


Figura 1: Sistema com duas massas e três molas

(a) Determine as equações de movimento das massas entre as molas de constantes elásticas k_1 e k_2, e entre k_2 e k_3.

(b) O sistema pode vibrar livremente, sem a ação de forças externas. Determine o produto dos autovalores do problema em função de k e de m.

(c) Supondo que $m = 1$, determine k de forma que os autovalores sejam precisamente $\lambda = 1$ e $\lambda = \sqrt{3}$.

RESPOSTA ESPERADA:

(a) As equações de movimento se obtém pela aplicação direta da segunda lei de Newton.

$$-k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2) = m\ddot{y}_1$$
$$k_2(y_1 - y_2) - k_3 y_2 = m\ddot{y}_2$$

(b) Para se determinar os autovalores do sistema, escrevemos as equações na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = m \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Fazendo-se a substituição

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} e^{i\lambda t},$$

obtemos o problema de autovalores

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = m\lambda^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Usando a hipótese $k_1 = k_2 = k_3$, vemos que a equação característica é simplesmente dada por

$$(k - m\lambda^2)(3k - m\lambda^2) = 0$$

Os autovalores pedidos são $\sqrt{k/m}$ e $\sqrt{3k/m}$

(c) Assumindo-se $m = 1$ e $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ obtemos $k = 1$.

Itens do programa abordados:
Autovalores e autovetores de uma transformação linear, equações diferenciais lineares.

Questão 3. Seja $N \in \mathbb{N}$ e $(E_i)_{i=1}^N$ uma família de sub-espaços vetoriais de um espaço vetorial E.

(a) Mostre que $\bigcap_{i\in\{1,\dots,N\}} E_i$ é um sub-espaço vetorial.

(b) Considere o espaço vetorial $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ das funções reais definidas em $\mathbb{R}$ de classe C^∞. Seja $n \in \mathbb{N}$ e o conjunto K das funções $f \in V$ tais que $f^{(k)}(0) = 0$, para $k = 0, \dots, n$, isto é, das funções que, assim como suas primeiras derivadas, se anulam em 0. Mostre que K é um sub-espaço vetorial de V.

<u>RESPOSTA ESPERADA:</u>

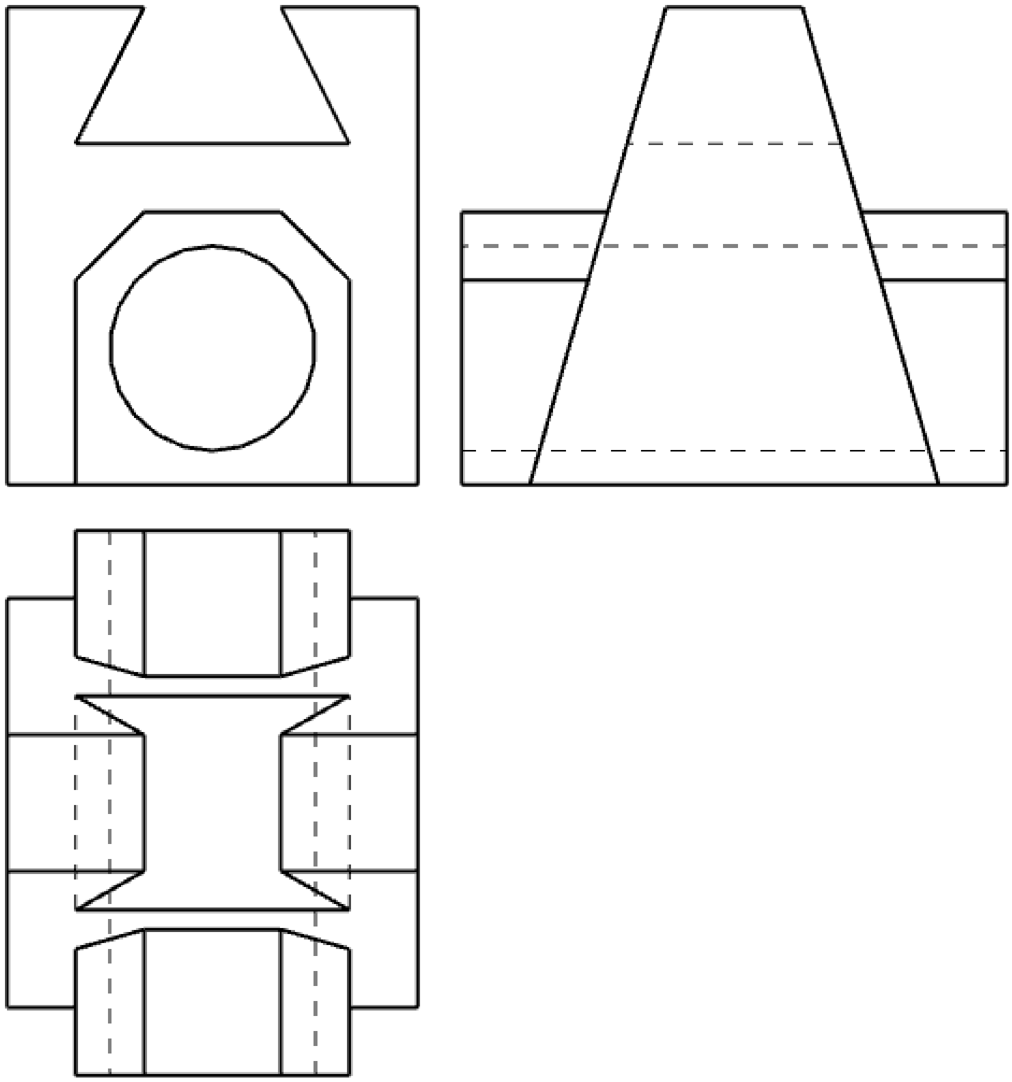
(a) Devemos mostrar que para quaisquer $x_1,\ x_2 \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,N\}} E_i$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $x_1 + \alpha x_2 \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,N\}} E_i$.

Como $x_1 \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,N\}} E_i$ e $x_2 \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,N\}} E_i$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ teremos $x_1 + \alpha x_2 \in E_i$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$. Dai segue a tese.

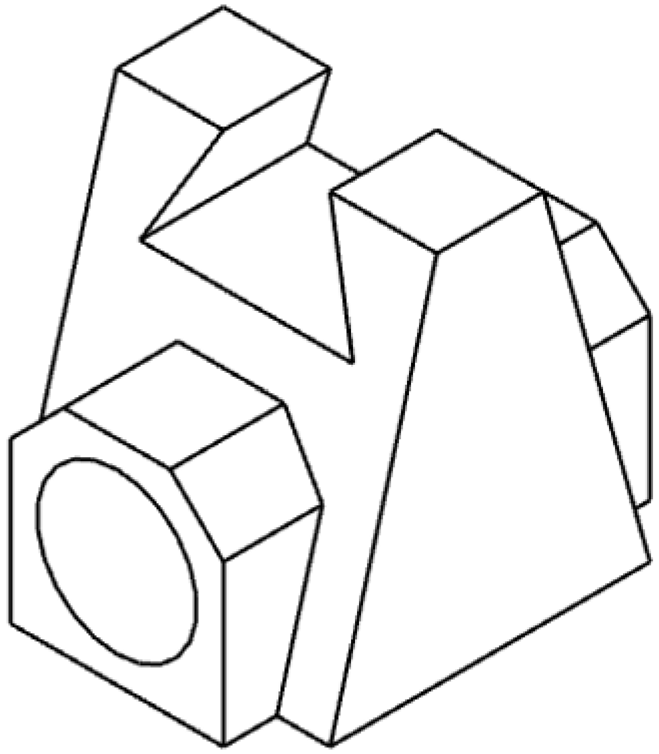
(b) O espaço K pode ser escrito como a interseção $k = \bigcap_{i\in\{0,\dots,n\}} K_k$, em que K_k é o conjunto das funções f tais que $f^{(k)}(0) = 0$. K_k é um sub-espaço vetorial, pois se $f_1, f_2 \in K_k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_1 + \alpha f_2)^k(0) = f_1^k(0) + \alpha f_2^k(0) = 0 + \alpha 0 = 0$. Agora a conclusão desejada segue como consequência do item anterior.

Itens do programa abordados:
Espaços vetoriais abstratos, vetores.

Questão 4. Desenhar a perspectiva isométrica simplificada da peça dada abaixo por suas vistas, representadas no primeiro diedro em escala natural. Desenhar a perspectiva em escala natural (1:1), tomando as medidas diretamente das vistas, e mostrando as faces frontal, superior e lateral direita.

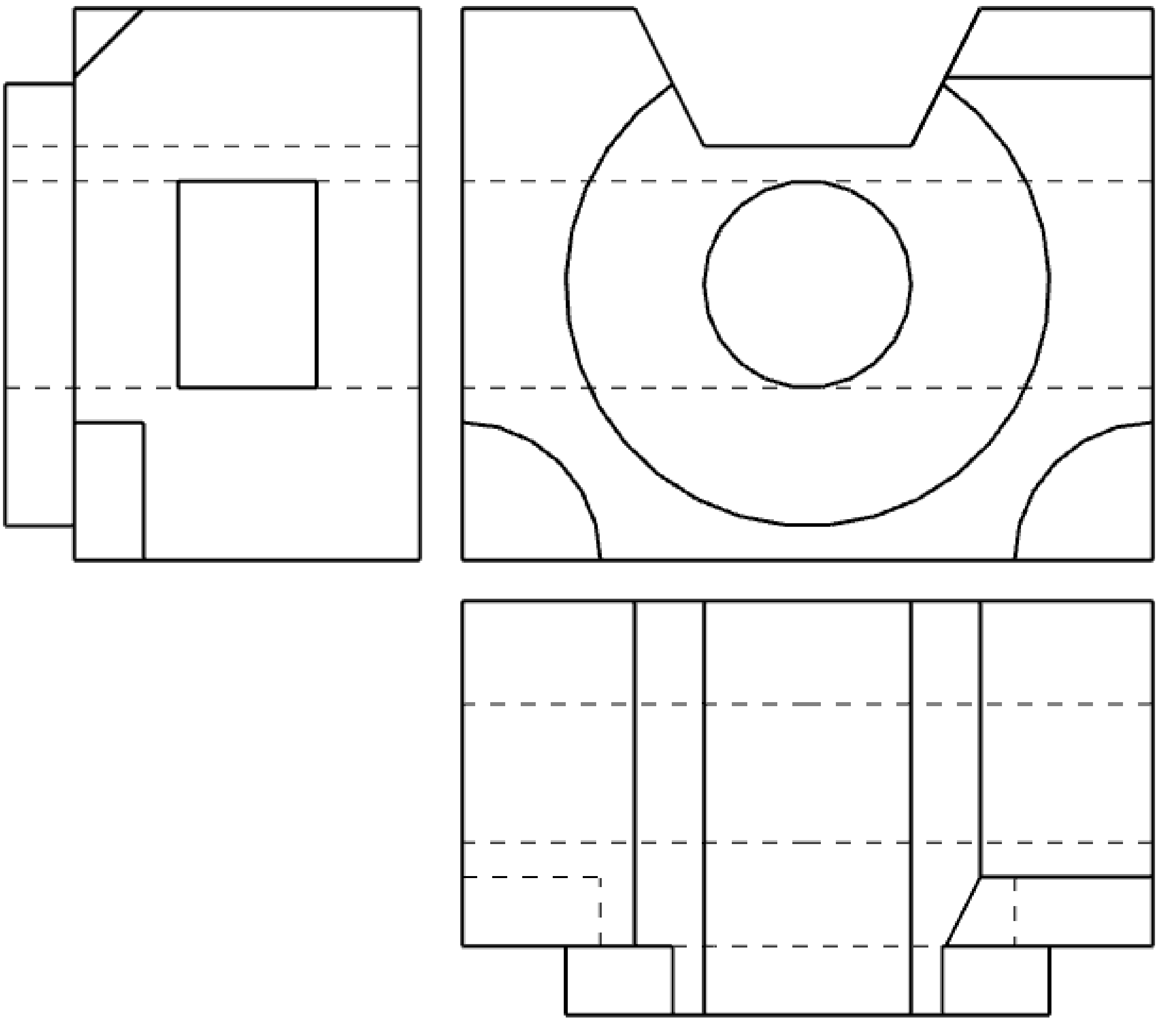


RESPOSTA ESPERADA:



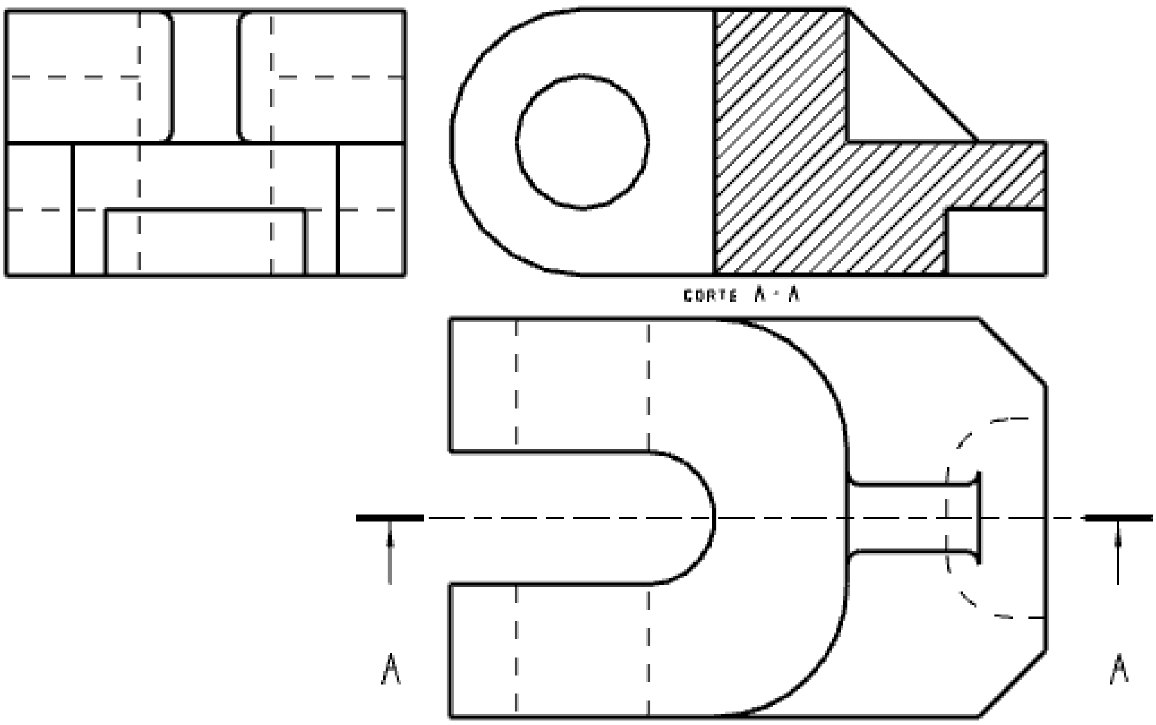
Questão 5. Dadas as vistas frontal e lateral direita de uma peça representadas no primeiro diedro, completar conjunto de vistas desenhando a vista superior na sua posição correta.

RESPOSTA ESPERADA:



Questão 6. Dadas as vistas superior e lateral direita de uma peça representadas no primeiro diedro e uma perspectiva trimétrica da peça, desenhe a vista frontal em corte AA, em sua posição correta.

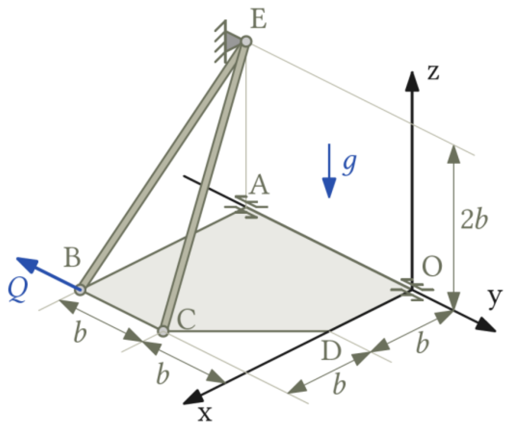
RESPOSTA ESPERADA:



Questão 7. A figura ilustra uma estrutura constituída por uma placa esbelta homogênea OABCD, de peso P, e por duas barras esbeltas e homogêneas BE e CE, de peso desprezível. Uma força $-Q\vec{\jmath}$ é aplicada à extremidade B da placa. Os vínculos em O e A são aneis ideais. As barras, por sua vez, possuem articulações em suas extremidades. O polígono OABCD é um pentágono contido no plano horizontal Oxy; os ângulos $\mathrm{D}\hat{O}\mathrm{A}$, $\mathrm{O}\hat{A}\mathrm{B}$ e $\mathrm{A}\hat{B}\mathrm{C}$ são retos; o ponto E está contido no plano vertical Oyz, verticalmente alinhado com A. Pede-se determinar:

(a) o esforço interno na barra CE, indicando explicitamente se está em tração ou compressão;

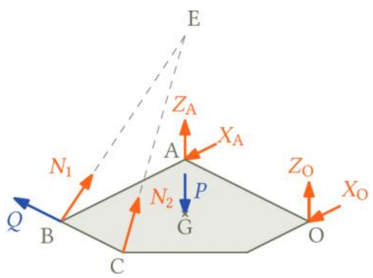
(b) as reações vinculares no anel em O.



RESPOSTA ESPERADA:

(a) A figura ao lado indica o diagrama de corpo livre da placa. A força exercida pela barra CE sobre a placa é $(\vec{N}_2, C)$ com:

$$\vec{N}_2 = N_2 \frac{(E - C)}{|E - C|} = N_2 \left(-\frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}\right)$$



Das condições necessárias para o equilíbrio, temos:

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}N_2 - Q = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N_2 = -3Q}$$

A barra CE encontra-se em <u>compressão</u>.

(b) A reações solicitadas podem ser obtidas a partir das seguintes condições de equilíbrio de momentos:

$$\sum M_{\mathrm{Az}} = 0 \;\Rightarrow\; -2bX_{\mathrm{O}} - 2bQ = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{X_{\mathrm{O}} = -Q}$$

$$\sum M_{\mathrm{Ex}} = 0 \;\Rightarrow\; -2bZ_{\mathrm{O}} - 2bQ - P(2b - |y_G|) = 0 \;\Rightarrow\; Z_{\mathrm{O}} = Q + P\left(1 - \frac{|y_G|}{2b}\right)$$

Para o cálculo de y_G, note que a placa pode ser concebida OABCD como uma placa originalmente quadrada de área $(2b)(2b) = 4b^2$ com centro de massa $(b, -b, 0)$ da qual foi removido um recorte triangular de área $\frac{1}{2}(b)(b) = \frac{1}{2}b^2$ e centro de massa $\left(2b - \frac{1}{3}b, -\frac{1}{3}b, 0\right)$. Assim:

$$y_G = \frac{4b^2(-b) - \frac{1}{2}b^2\left(-\frac{1}{3}b\right)}{4b^2 - \frac{1}{2}b^2} \Rightarrow y_G = -\frac{23}{21}b \Rightarrow \boxed{Z_O = Q + \frac{19}{42}P}$$

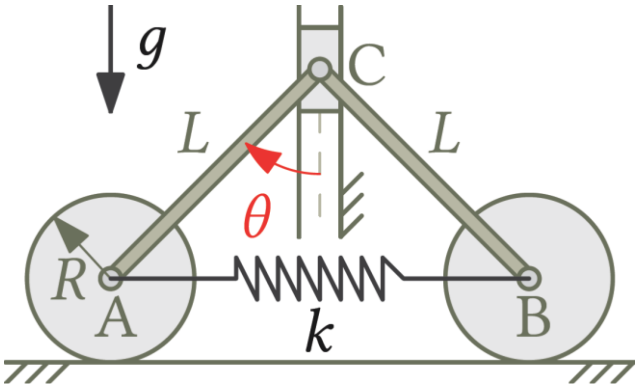
Itens do programa abordados:

Momento em relação a eixo; Baricentro; Vínculos: tipos e aplicações; Sistemas isostáticos planos e tridimensionais; Sistemas de sólidos com múltiplos elementos (placas, barras, fios, polias).

Questão 8. A figura ilustra um sistema composto por dois discos homogêneos idênticos, cada um deles com massa m e raio R, de centros A e B, duas barras esbeltas e homogêneas AC e BC, de massas desprezíveis, cada uma com comprimento L e por um pequeno bloco C de massa m. Os discos podem rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal, ao passo que os blocos podem transladar sem atrito em uma guia vertical. Os vínculos em A, B e C são articulações ideais. Uma mola linear ideal, de constante k e comprimento natural l_0 tem suas extremidades ligadas aos centros A e B dos discos. Para cada disco, adote: $J_{Az} = J_{Bz} = \frac{mR^2}{2}$. Pede-se determinar:

(a) a expressão da energia cinética do sistema para uma configuração genérica, em função de θ e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros fornecidos no enunciado;

(b) a expressão da energia potencial do sistema para uma configuração genérica, em função de θ e dos parâmetros fornecidos no enunciado.



RESPOSTA ESPERADA:

a) Para os pontos A, B e C:

$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = \left|\frac{d}{dt}(L\sin\theta)\right| = L|\dot{\theta}|\cos\theta \quad \text{e} \quad |\vec{v}_C| = \left|\frac{d}{dt}(L\cos\theta)\right| = L|\dot{\theta}|\sin\theta$$

Para ambos os discos:

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}_A|}{R} = \frac{|\vec{v}_B|}{R} = \frac{L}{R}|\dot{\theta}|\cos\theta$$

Assim, a energia cinética do sistema é:

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2}J_{Az}|\vec{\omega}|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2}J_{Bz}|\vec{\omega}|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_C|^2$$

$$= m(L|\dot{\theta}|\cos\theta)^2 + \frac{mR^2}{2}\left(\frac{L}{R}|\dot{\theta}|\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}m(L|\dot{\theta}|\sin\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2\left(3\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}$$

b) A energia potencial do sistema é dada por:

$$V = mgh_C + \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = mgL\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2L\sin\theta - l_0\right)^2}$$

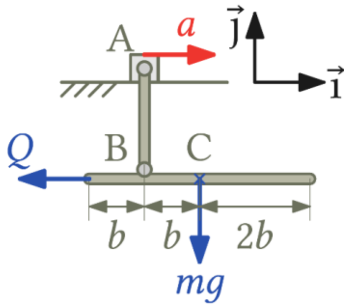
Itens do programa abordados:

Movimento plano e centro instantâneo de rotação; Teorema da Energia Cinética.

Questão 9. A figura ilustra um sistema composto por duas barras esbeltas e homogêneas e um bloco A. A barra de centro C tem comprimento $4b$ e massa m. A barra AB tem comprimento $2b$ e inércia desprezível estando articulada ao bloco na extremidade A e à barra de centro C em B. O bloco A translada sobre o plano horizontal com aceleração $a\vec{\imath}$ conhecida. Sabe-se sistema parte do repouso da configuração indicada e que se aplica uma força $-Q\vec{\imath}$ na extremidade direita da barra de centro C. Para a barra de centro C, adote: $J_{Az} = 8mb^2$. Pede-se determinar, para a configuração ilustrada:

(a) a expressão do vetor aceleração $\vec{a}_c$ em função da aceleração a do bloco e das acelerações angulares α_1 e α_2, da barra AB e da barra de centro C, respectivamente (adote: $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1\vec{k}$ e $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2\vec{k}$);

(b) as expressões de α_1 e α_2 em função de a, b, g, m e Q.



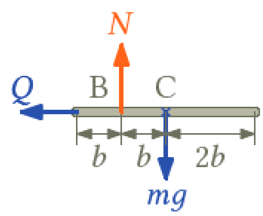
RESPOSTA ESPERADA:

a) Utilizando as equações dos campos de acelerações para cada uma das barras:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge (B - A) - \omega_1^2(B - A) = a\vec{\imath} + \alpha_1\vec{k} \wedge (-2b\vec{\jmath}) - \vec{0} = (a + 2b\alpha_1)\vec{\imath}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge (C - B) - \omega_2^2(C - B) = (a + 2b\alpha_1)\vec{\imath} + \alpha_2\vec{k} \wedge (b\vec{\imath}) - \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_C = (a + 2b\alpha_1)\vec{\imath} + \alpha_2 b\vec{\jmath}}$$

b) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular para a barra de centro C, com polo B:



$$m(C - B) \wedge \vec{a}_B + J_{Bz}\vec{\alpha}_2 = \vec{M}_B \quad \Rightarrow \quad mb\vec{\imath} \wedge (a + 2b\alpha_1)\vec{\imath} + (8mb^2 + mb^2)\alpha_2\vec{k} = -mgb\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = -\frac{g}{9b}}$$

Aplicando o Teorema da Resultante para a mesma barra:

$$m\vec{a}_C = \vec{R} \quad \Rightarrow \quad m(a + 2b\alpha_1)\vec{\imath} + m\alpha_2 b\vec{\jmath} = -Q\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = -\frac{1}{2b}\left(a + \frac{Q}{m}\right)}$$

Itens do programa abordados:

Campo de acelerações; Teorema da Resultante; Teorema da Quantidade de Movimento Angular.

RASCUNHO