EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2021/2022
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2021/2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

05/12/2021

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: ______________________________________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **20 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página **20** é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

1) Seja o espaço vetorial $M(11)(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 11 cujos elementos são números reais.

a) Mostre que se $A \in M(11)(\mathbb{R})$ é tal que $Tr(A^t A) = 0$ então $A = [0]_{11x11}$, em que $[0]_{11x11}$ é a matriz nula e Tr é o traço.

b) O resultado continua válido se $A \in M(11)(C)$, em que $M(11)(C)$ é o espaço das matrizes quadradas de ordem 11 cujos elementos são números complexos?

RESPOSTA:

(a)

Denote por a_{ij} os elementos da matriz A. Então os elementos b_{mn}, com *m*, *n* = 1,...,11 da matriz $A^t A$ são dados por $b_{mn} = \sum_{p=1}^{11} a_{pm} a_{pn}$.

Logo, $Tr(A^t A) = \sum_{m=1}^{11} b_{mn} = \sum_{m=1}^{11} \sum_{p=1}^{11} a_{pm} a_{pn} = \sum_{m=1}^{11} \sum_{p=1}^{11} a^2{}_{pm}$

Como se trata de uma soma de termos reais ao quadrado, a soma é não negativa. Assim, se $Tr(A^t A) = 0$ então $A = [0]_{11x11}$.

(b)

Se $A \in M(11)(C)$, então a soma de quadrados acima não é necessariamente não negativa. Então o resultado do item (a) não é mais verdadeiro.

2) Seja o plano α do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + y + z = 0$. Seja o ponto $P = (x_0,\ y_0,\ z_0)$.

a) Determine a projeção de P sobre o plano α segundo a direção $\vec{e} = (1, 2, 3)$.

b) Determine o comprimento do segmento P_1P_2 em que $P_1 = (1, 1, 1)$ e P_2 é a projeção de P_1 sobre o plano α segundo a direção $\vec{e} = (1, 2, 3)$.

RESPOSTA:

(a)
A projeção de $P = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ sobre α segundo $\vec{e}$ é obtida pela interseção da reta $\lambda\vec{e} + P$ com o plano α. A interseção é um ponto Q. Primeiro, obtemos a solução da equação

$$(1\lambda + x_0) + (2\lambda + y_0) + (3\lambda + z_0) = 0.$$

Obtemos $\lambda = -\frac{x_0+y_0+z_0}{6}$. Daí o ponto de interseção procurado é:

$$Q = \left(x_0 - \frac{x_0 + y_0 + z_0}{6}, y_0 - \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}, z_0 - \frac{x_0 + y_0 + z_0}{2}\right).$$

(b)
A projeção de $P_1 = (1, 1, 1)$ é o ponto $P_2 = \left(1 - \frac{3}{6}, 1 - \frac{3}{3}, 1 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

O segmento P_1P_2 tem comprimento $\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

3) Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tem como representação em uma base dada, a matriz real e simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de A.

b) Suponha que os autovalores de A sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (em ordem crescente) com respectivos autovetores $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ (que formam uma base ortonormal). Encontre a representação de T quando a base usada for $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

(c) Determine a representação de T^5 usando a mesma base do item anterior.

RESPOSTA:

(a)
Para achar os autovalores, devemos determinar as raízes do polinômio característico

$$P(\lambda) = Det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Por inspeção da matriz acima, vemos que $\lambda = 3$ é uma solução de $P(\lambda) = 0$. A equação do polinômio característico é dada por $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$. Fatorando $(\lambda - 3)$, obtemos $(\lambda - 3)(9 - \lambda^2) = 0$. Logo, $\lambda_1 = 3$ (dupla) e $\lambda_2 = -3$ são os autovalores de A.

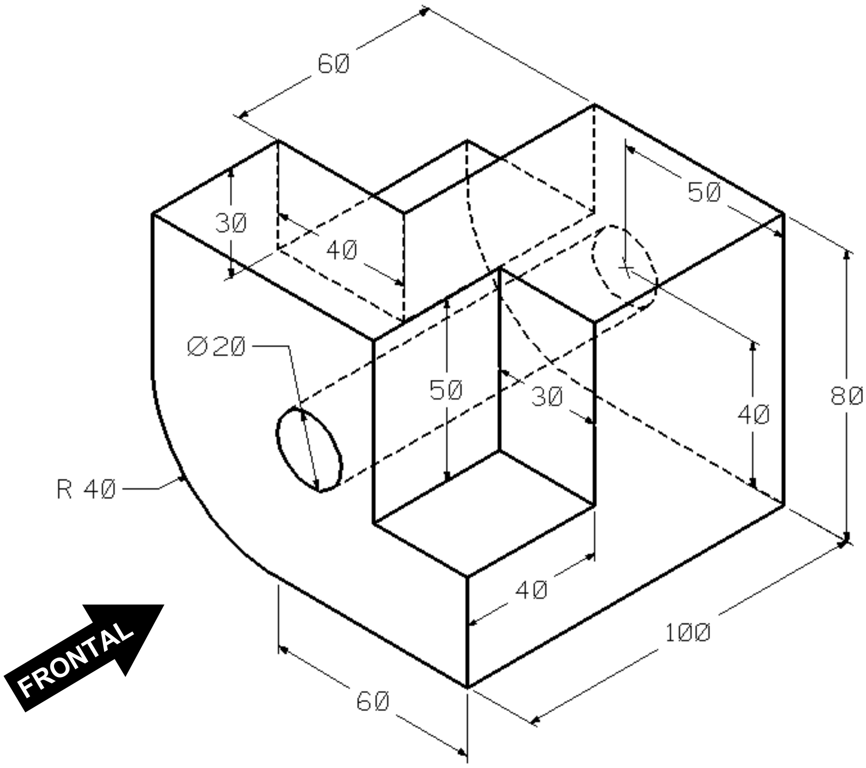
(b)
A matriz diagonalizada é dada simplesmente por

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

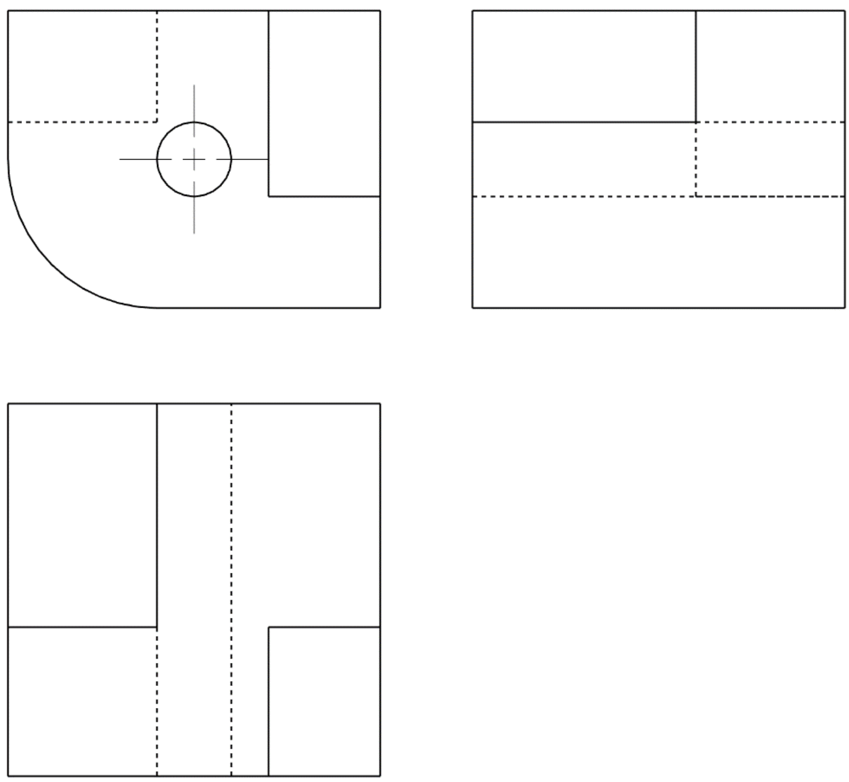
(c)
A matriz que representa T^5 na base do item (a) é dada por

$$\begin{bmatrix} -3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix}.$$

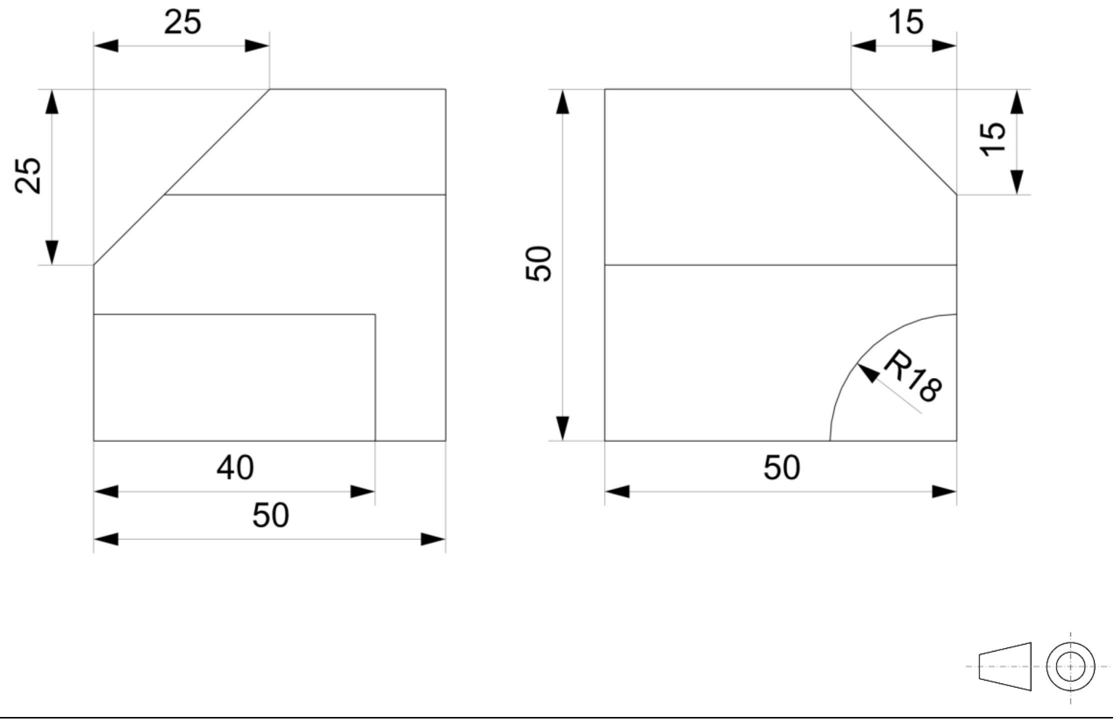
4) Desenhar, **em escala 1:2**, as vistas ortográficas frontal, superior e lateral esquerda da peça abaixo no **primeiro diedro**, adotando como **frontal a face indicada pela seta**. Medidas em milímetros. Não é necessário cotar.



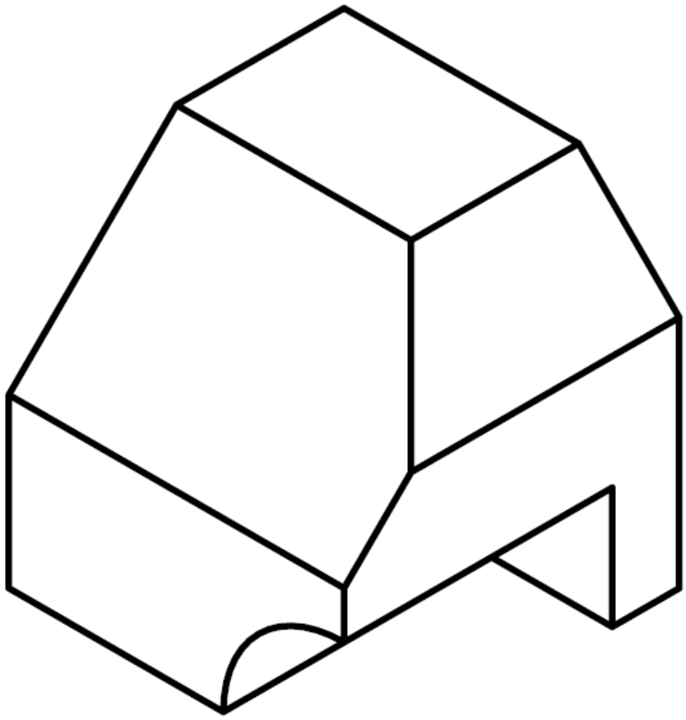
RESPOSTA:



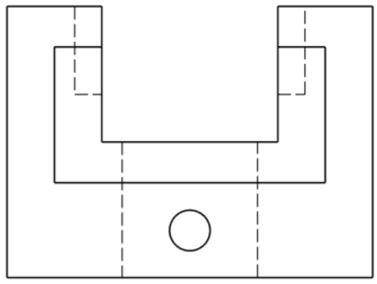
5) Desenhar a perspectiva **isométrica** simplificada da peça abaixo, mostrando suas **faces frontal, lateral direita e superior** (no par de vistas abaixo, a frontal é a da direita). Medidas em **milímetros**. Desenhe em escala 1:1.

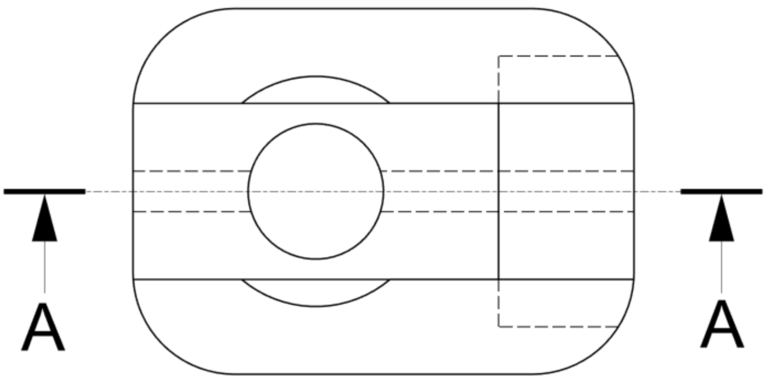


RESPOSTA:

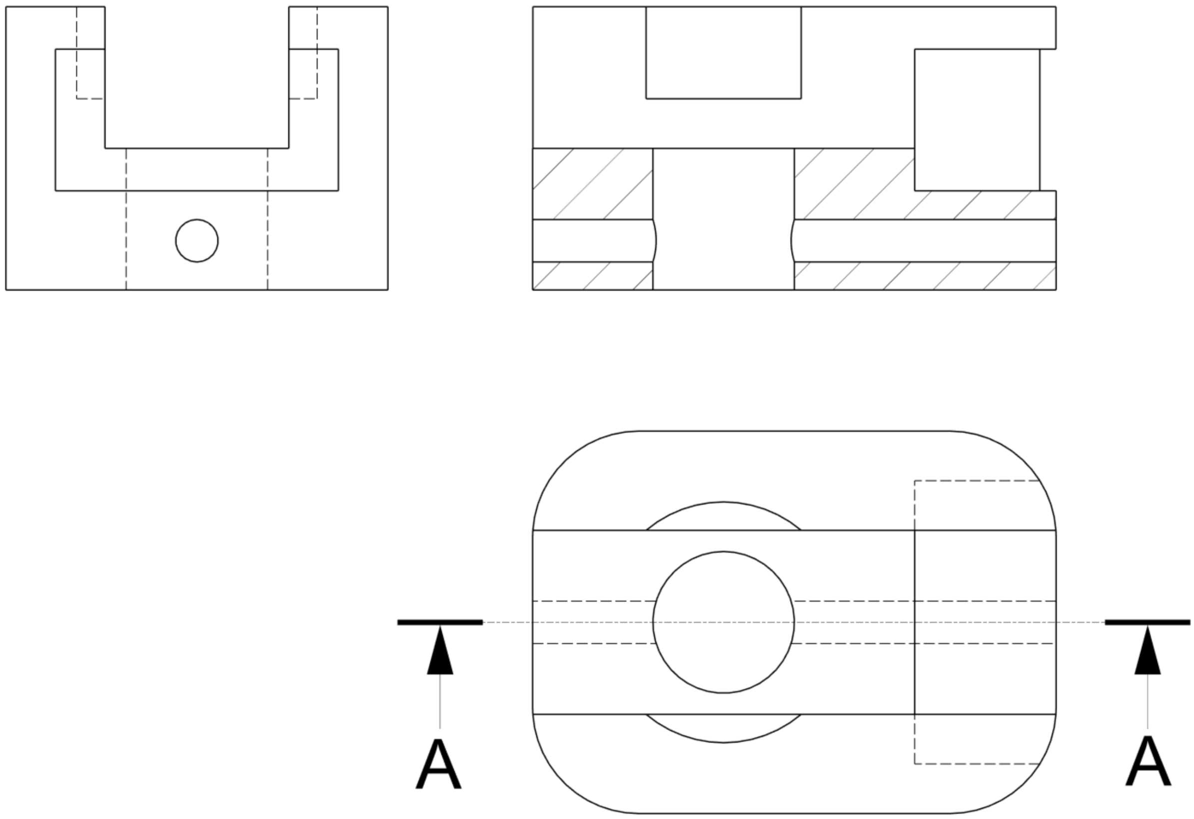


6) Completar o conjunto de vistas abaixo, desenhando a **vista em corte AA**, em sua posição correta.





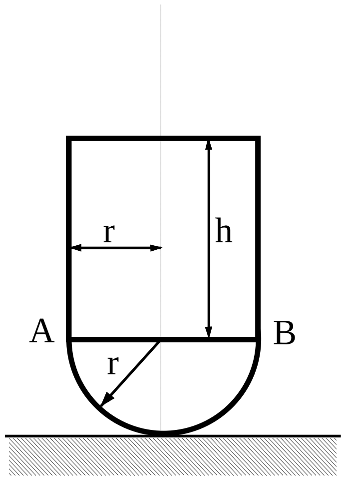
RESPOSTA:



7) O corpo apresentado na figura é constituído por um cilindro homogêneo de raio r e uma semiesfera também homogênea de raio r. Os pesos específicos do cilindro e da esfera são iguais. O corpo se apoia sobre um plano horizontal liso conforme a figura. (*Dado: a distância do centro de gravidade da semiesfera homogênea à sua base é igual a* 3r/8). Pede-se:

a) Determine em função de h e r, a cota vertical do centro de massa (baricentro) do conjunto em relação ao plano horizontal;

b) Indique qual deve ser a posição do baricentro para que o corpo possa permanecer em equilíbrio independentemente da inclinação do eixo de simetria com a vertical.



RESPOSTA:

(a)

$$Y_G = \frac{\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3\left(r - \frac{3}{8}r\right) + h\pi r^2\left(\frac{h}{2} + r\right)}{\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3 + h\pi r^2}$$

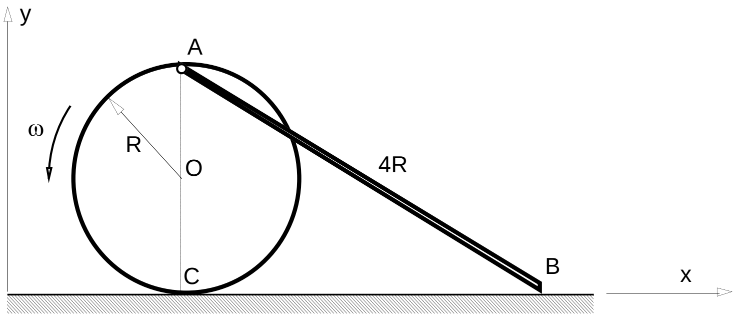
$$Y_G = \frac{\frac{5}{12}r^2 + \frac{h^2}{2} + hr}{\frac{2}{3}r + h}$$

(b)

O baricentro deve se localizar no centro da base da semiesfera (ponto C de cota vertical r).

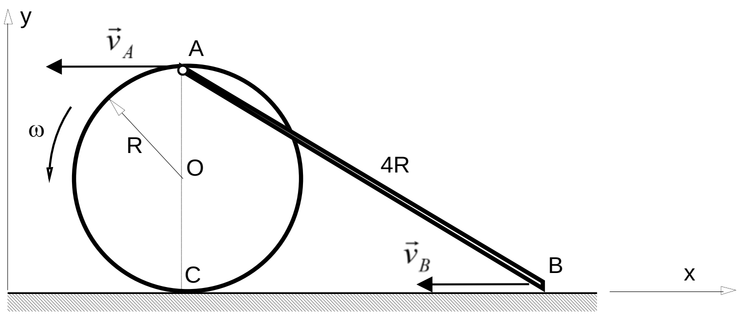
8) O disco de centro O e raio R rola sem escorregar sobre o plano fixo horizontal, com velocidade angular de módulo ω constante. A barra AB de comprimento 4R é articulada em A no disco e o ponto B escorrega mantendo contato com o plano. Para a posição indicada:

a) Indique o CIR (centro instantâneo de rotação) da barra e o CIR do disco;
b) Calcule a velocidade vetorial de B;
c) Calcule a aceleração vetorial de A.



RESPOSTA:

(a)



Neste instante a velocidade angular da barra é nula e o CIR da barra está no infinito.
O ponto C do disco tem velocidade nula (ponto de contato com o solo).
O ponto C é o CIR do disco.

(b)

$$\vec{v}_A = -2\omega R\vec{i}$$
$$\omega_{barra} = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B$$
$$\vec{v}_B = -2\omega R\vec{i}$$

(c)

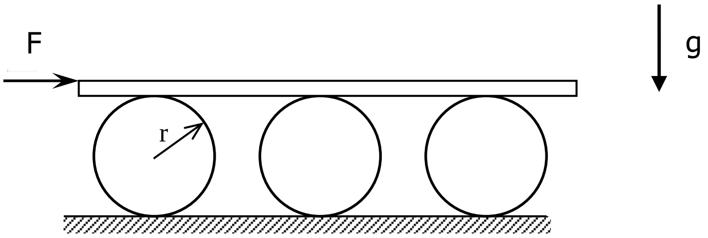
$$\vec{v}_O = -\omega R\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_O = \vec{0}$$
$$\vec{a}_A = \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(A - o\right)\right]$$
$$\vec{a}_A = -\omega^2 R\vec{j}$$

9) Uma barra de massa M apoia-se sobre três cilindros homogêneos de raio r e massa m. Uma força horizontal F atua na barra colocando o sistema em movimento. Admitindo-se que não ocorra escorregamento em nenhum contato, pede-se:

a) Os diagramas de corpo livre da barra e dos cilindros;

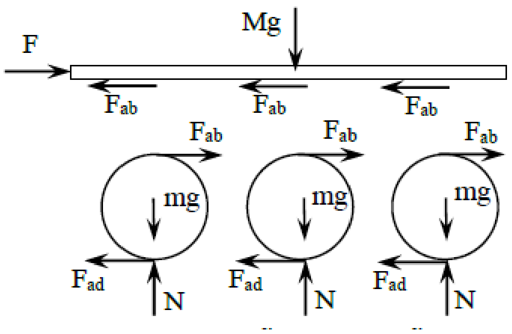
b) A expressão da energia cinética do sistema;

c) A aceleração da barra.



RESPOSTA:

a) Diagrama de corpo livre:



b) A velocidade e aceleração da barra são:

$$v_B = 2\omega r$$
$$a_B = 2\dot{\omega} r$$

A expressão da energia cinética do sistema fica:

$$T = \frac{1}{2}Mv_B + 3\frac{1}{2}m(\omega r)^2 + 3\frac{1}{2}J_G\omega^2$$

$$\boxed{T = \left(\frac{8M + 9m}{4}\right)\omega^2 r^2}$$

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$\Delta T = \tau \quad , \quad T_0 = 0$

Do item b) e $\tau = Fx$, tem-se $\left(\dfrac{8M+9m}{4}\right)\omega^2 r^2 = Fx$

Derivando com relação ao tempo:

$$\frac{8M+9m}{4} 2\omega\dot{\omega}r^2 = Fv_B \qquad \frac{8M+9m}{4} 2\omega\dot{\omega}r^2 = F2\omega r \qquad \dot{\omega} = \frac{4F}{(8M+9m)r}$$

Logo, a aceleração da barra será:

$$\boxed{a_B = \frac{8F}{8M+9m}}$$

RASCUNHO