Prova A

EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2020/2021
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2020/2021

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

31/01/2021

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: __________________________________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **18 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página **18** é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

1) Seja V o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Considere o subconjunto W de V formado pelas funções da forma

$$x \to P(x)\cos(x) + Q(x)\sin x,$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de grau n na variável x, com coeficientes em $\mathbb{R}$.

a) Mostre que, herdando as operações de V, W é subespaço vetorial de V.

b) Qual é a dimensão de W? Justifique fornecendo uma base de W.

RESPOSTA:

1a) O conjunto W é formado pelas funções do tipo

$$x \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \cos(x) + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \sin(x), \tag{1}$$

com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots n$.

Precisamos mostrar que $0 \in W$, e que a soma de duas funções do tipo (1) e o produto de um elemento de W por um número real continuam sendo elementos de W.

Claramente todas essas 3 propriedades são satisfeitas. Então W é um subespaço vetorial de V.

1b) Os vetores $x \mapsto x^j \cos(x)$ e $x \mapsto x^j \sin(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, geram V, pois qualquer elemento de W pode ser escrito como uma combinação deles. Além disso, o conjunto de funções de $x \in \mathbb{R}$ dado por

$$B = \{x^j \cos(x), x^j \sin(x) | j = 0, \ldots, n\}$$

é linearmente independente, pois vemos que a equação

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \cos(x) + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \sin(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

implica $a_j = b_j = 0$, $j = 0, \ldots, n$. A razão é a seguinte. Tomando $x = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, vemos que o polinômio $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ de grau finito tem infinitos zeros em $x = n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$. Isso só é possível se todos os seus coeficientes $a_0, \ldots a_n$ forem nulos. Um argumento similar leva à conclusão de que $b_0, \ldots b_n$ são também todos nulos.

Assim, como o conjunto B gera W e é linearmente independente, temos que B é uma base de W. A dimensão de W é dada pela quantidade de vetores em uma de suas bases. Daí $\dim(W) = 2n + 2$.

2) Seja o espaço vetorial das funções reais contínuas V definidas no intervalo [0, 1]. Seja

$$W = \left\{ f \in V \,\middle|\, \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}.$$

a) Mostre que W é um subespaço vetorial de V.

b) Determine um subespaço $Y \subset V$ tal que $V = W \oplus Y$.

RESPOSTA:

2a) Podemos verificar diretamente que W é um subespaço vetorial de V provando que $0 \in W$, que a soma de dois elementos de W permanece em W, assim como o produto de um número real por um elemento de W. Outro modo de se provar que W é um subespaço vetorial de V é apontar que W é o núcleo do operador linear $f \mapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

2b) Dada uma função $g \in V$, escrevemos

$$g = \left(g - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \right) + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

É claro que $\left(g - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \right) \in W$ e que $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \in V$ é uma constante. Toda função de V pode ser decomposta dessa forma.

Fazemos $Y = \{c \in \mathbb{R} \,|\, c \text{ é uma constante } \}$

Além disso, essa forma de decomposição é única, pois a integral de uma constante não nula no intervalo $[0, 1]$ é também não nula. Daí $V = W \oplus Y$.

3) Considere a equação diferencial vetorial $Y'(t) = AY(t)$ em que A é a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é uma função de classe C^1.

a) Para condições iniciais $Y(0) = [a \ \ b]^T \in \mathbb{R}^2$, forneça todas as soluções da equação acima. Mostre explicitamente que não existem outras soluções no espaço das funções de classe C^1.

b) Qual é a dimensão do espaço solução, subespaço vetorial das funções reais de classe C^1? Forneça uma base para o espaço de soluções.

RESPOSTA:

3a) As soluções da equação são dadas pela fórmula

$$Y(t) = \mathrm{e}^{At} Y_0,$$

em que $Y_0 = Y(0) = [a \quad b]^T$.

Os autovalores de A são $-i$ e $+i$, com correspondentes autovetores $v_1 = [1 \quad -i]^T$ e $v_2 = [1 \quad i]^T$ (ou ainda múltiplos desses). Usando esses autopares, obtemos a fórmula explicita que dá a solução da equação diferencial.

$$Y(t) = d_1 \mathrm{e}^{-it} v_1 + d_2 \mathrm{e}^{it} v_2,$$

em que $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ dependem da condição inicial $Y_0 = Y(0)$.

Para $t = 0$, temos $d_1 + d_2 = a \in \mathbb{R}$ e $-id_1 + id_2 = b \in \mathbb{R}$. Dai,

$$Y(t) = \frac{a+ib}{2}(\cos(t) - i\sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{a-ib}{2}(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Simplificando, temos finalmente

$$Y(t) = \begin{bmatrix} a\cos(t) + b\sin(t) \\ b\cos(t) - a\sin(t) \end{bmatrix}.$$

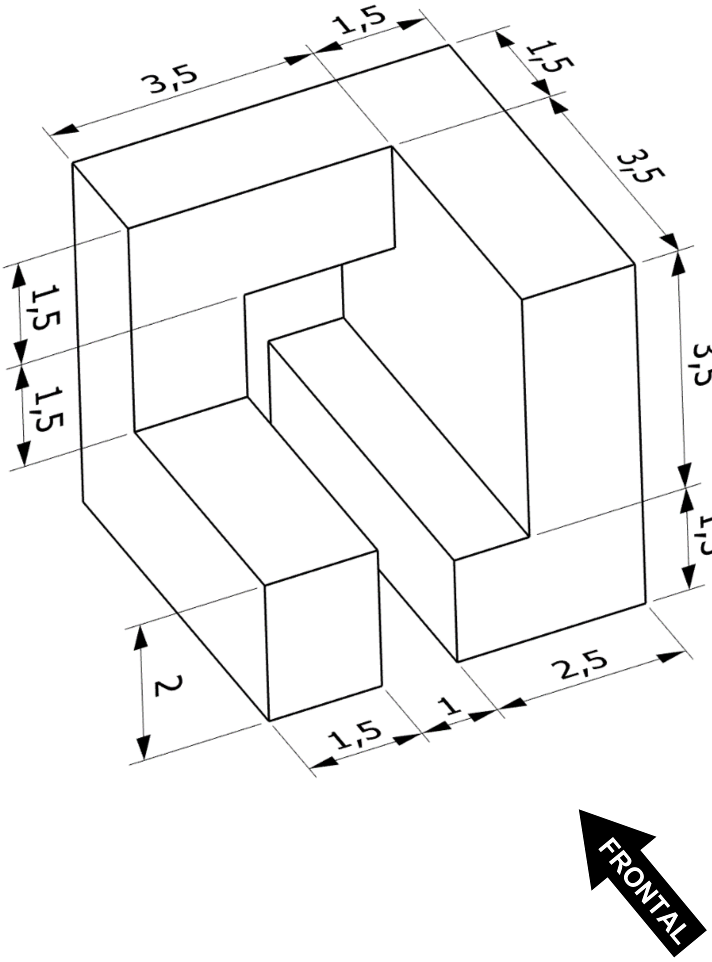
Para mostrar que não existem outras soluções, suponha que exista uma outra solução $G(t)$, tal que $G'(t) = AG(t)$ que satisfaz $G(0) = [a \quad b]^T$. Agora considere a expressão $\mathrm{e}^{-At}G(t)$. Derivando-a com relação ao tempo, temos

$$\mathrm{e}^{-At}(-A)G(t) + \mathrm{e}^{-At}G'(t) = \mathrm{e}^{-At}(-A)G(t) + \mathrm{e}^{-At}AG(t) = 0.$$

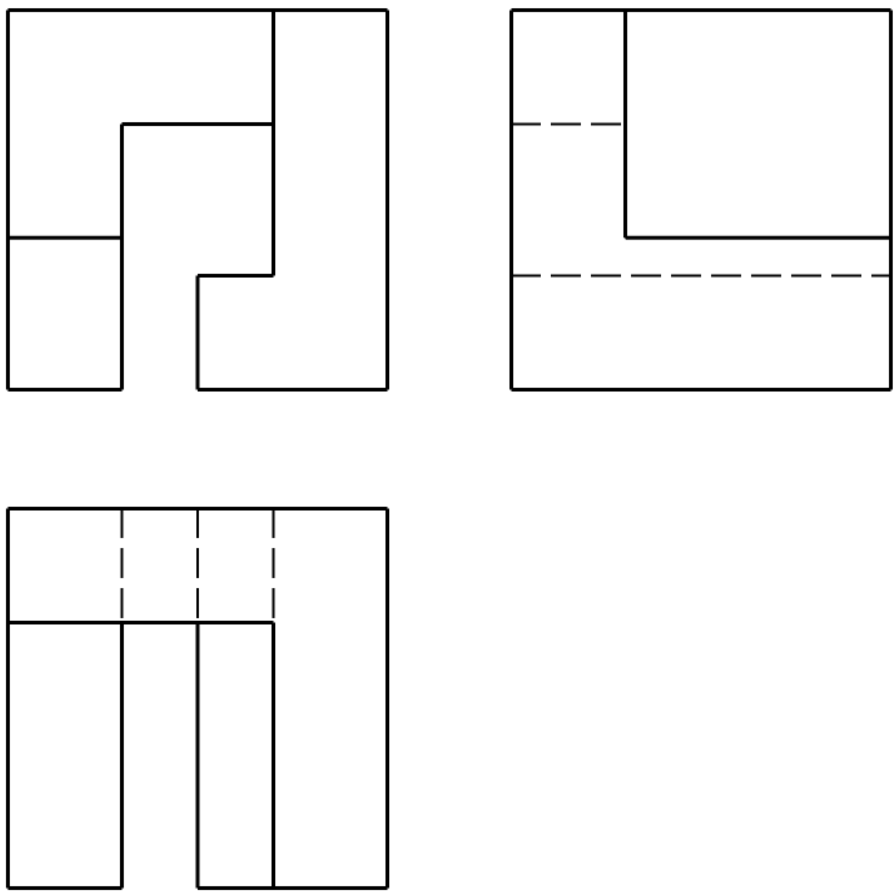
Isto é, $\mathrm{e}^{-At}G(t)$ é um vetor constante. Então $\mathrm{e}^{-At}G(t) = G(0) = [a \quad b]^T$. A conclusão inevitável é que $G(t) = Y(t)$, e assim, a solução encontrada é a única.

3b) A dimensão do espaço é 2. Uma base é $\{t \mapsto \cos(t), t \mapsto \sin(t)\}$.

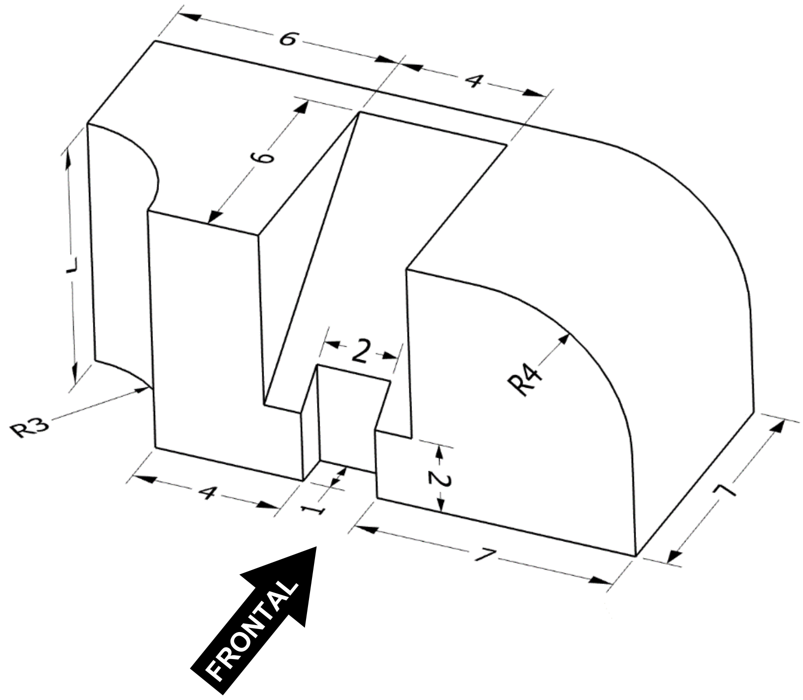
4) Dada a perspectiva axonométrica abaixo, desenhar as **vistas frontal, lateral esquerda e superior** da peça, no **1º diedro**. Adote como frontal aquela indicada pela seta. Medidas em **centímetros**. Desenhe em escala natural (1:1).



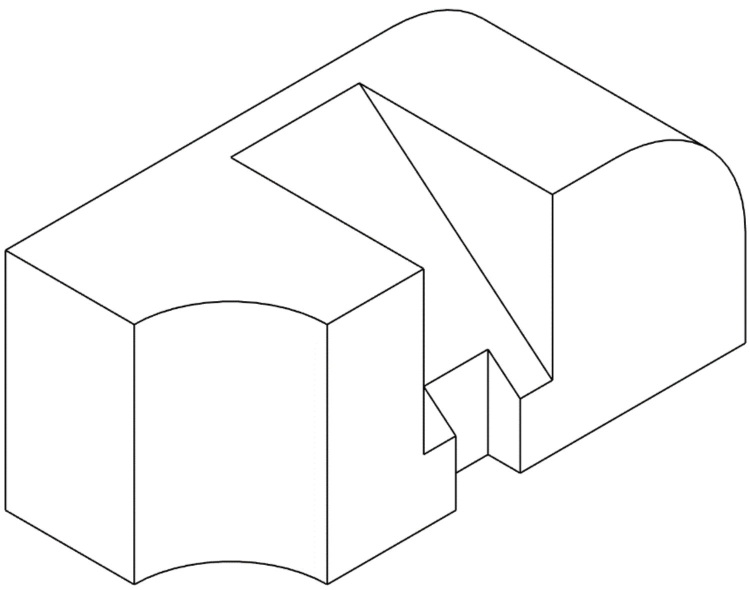
RESPOSTA:



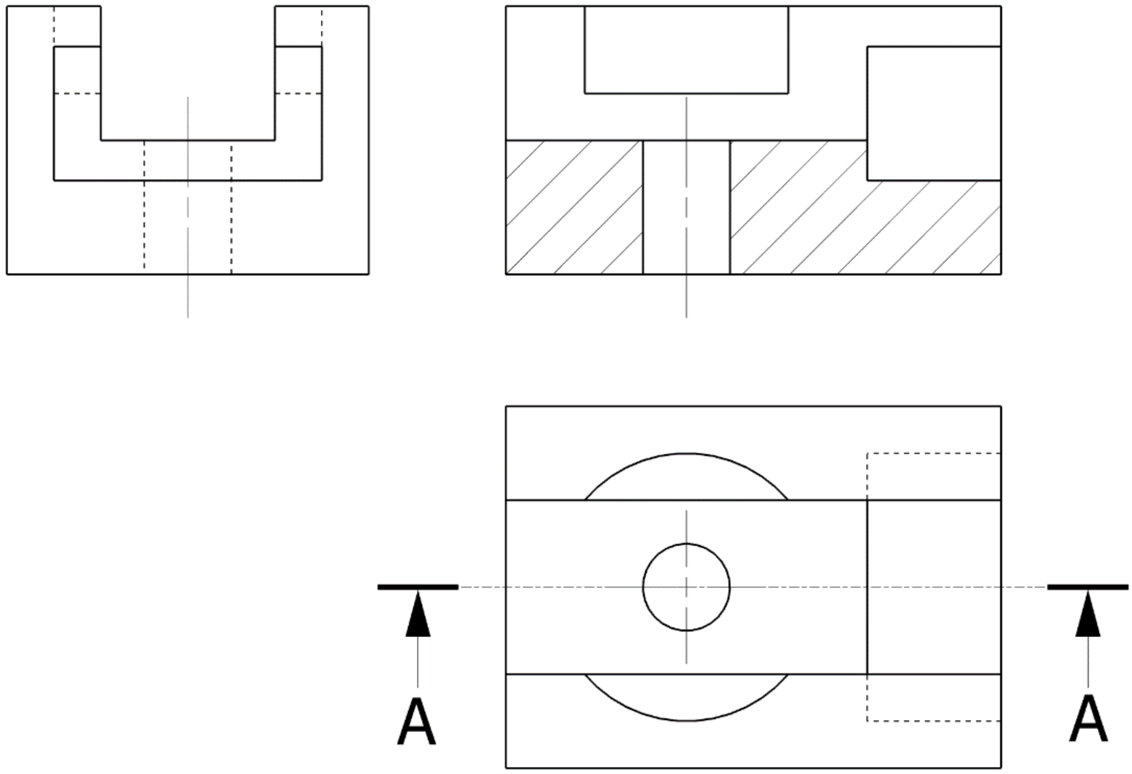
5) Desenhar a perspectiva **isométrica** simplificada da peça abaixo, mostrando suas **faces frontal, lateral esquerda e superior**. Adote como frontal aquela indicada pela seta. Medidas em **centímetros**. Desenhe em escala 1:2.



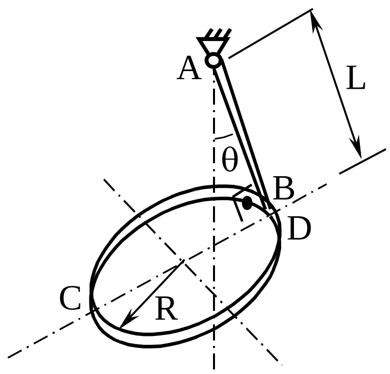
RESPOSTA:



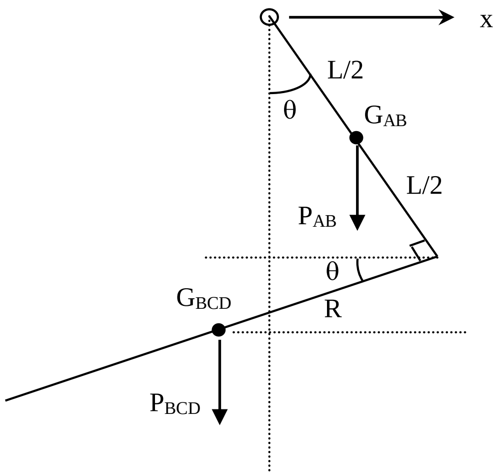
6) Completar o conjunto de vistas abaixo, desenhando a **vista em corte AA**, em sua posição correta.



7) O arame da figura tem peso específico (linear) γ e área de seção transversal S. O trecho reto AB tem comprimento L e forma um ângulo reto com o plano que contém o trecho BCD de raio R. Pede-se o ângulo θ que o trecho AB forma com a vertical na posição de equilíbrio.



RESPOSTA:



$$x_G = \frac{\frac{L}{2} sen\theta \cdot L - \left(R\cos\theta - Lsen\theta\right)2\pi R}{2\pi R + L} = 0$$

$$2\pi R^2 \cos\theta - 2\pi RLsen\theta - \frac{L^2}{2} sen\theta = 0$$

$$2\pi R^2 - \left(2\pi RL + \frac{L^2}{2}\right)\tan\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{2\pi R^2}{\left(2\pi RL + \frac{L^2}{2}\right)}$$

$$\boxed{\theta = \arctan\frac{2\pi R^2}{\left(2\pi RL + \frac{L^2}{2}\right)}}$$

Ou:

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore P_{BCD} \cdot \left(R\cos\theta - Lsen\theta\right) = P_{AB} \cdot \left(\frac{L}{2} sen\theta\right)$$

$$P_{BCD} = 2\pi R\gamma \qquad ; \qquad P_{AB} = \gamma L$$

$$2\pi R^2 \cos\theta - 2\pi RLsen\theta = \frac{L^2}{2} sen\theta$$

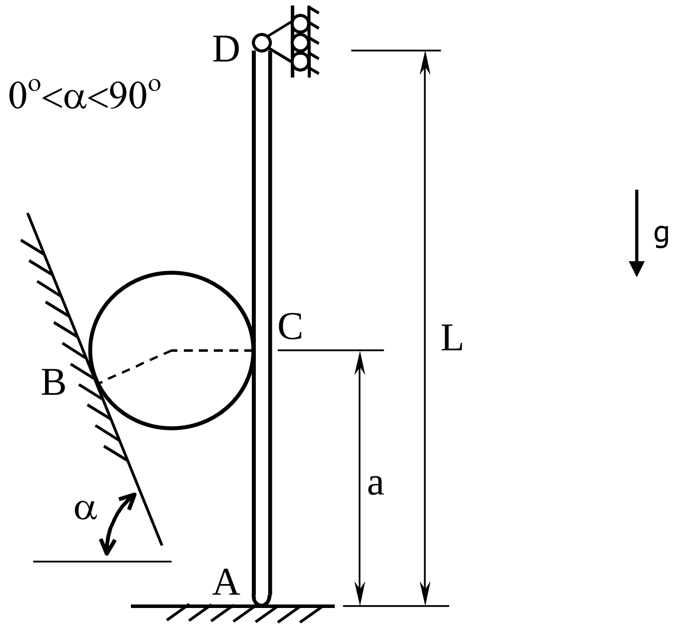
$$\boxed{\theta = \arctan\frac{2\pi R^2}{\left(2\pi RL + \frac{L^2}{2}\right)}}$$

8) A barra AD tem peso P e está na vertical. O vínculo em D é um apoio simples e em A existe atrito. A esfera tem peso P e está apoiada sem atrito nos pontos B e C. Considere o sistema em equilíbrio.

a) Desenhe o diagrama de corpo livre da barra AD e o diagrama de corpo livre da esfera.

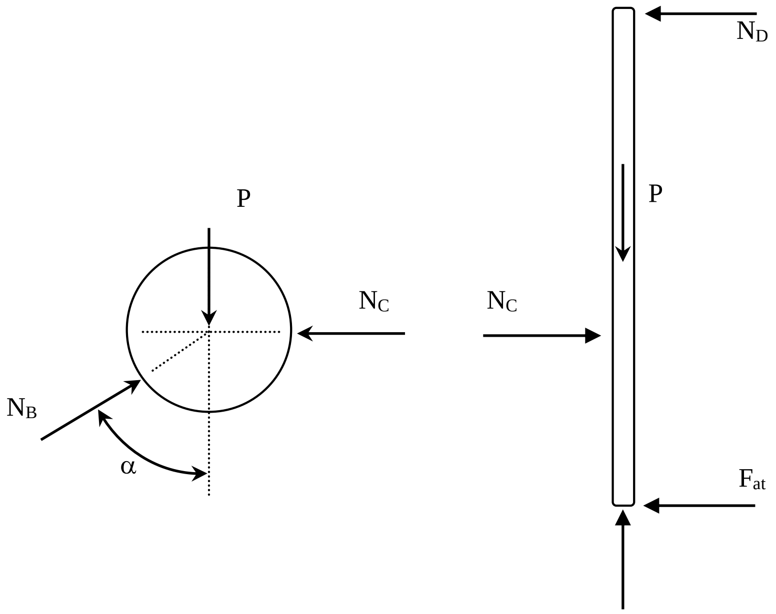
b) Calcule a reação vertical do solo sobre a barra no ponto A, a força de atrito e a reação em D.

c) Sabendo que o coeficiente de atrito é μ, determine o maior valor de α tal que ainda exista equilíbrio.



RESPOSTA:

a)



b)

Na esfera:

$$\sum F_y = 0 \therefore N_B \cos\alpha = P$$

$$\sum F_x = 0 \therefore N_C = N_B sen\alpha \Rightarrow N_C = P\tan\alpha$$

Na barra:

$$\sum F_y = 0 \therefore \quad \boxed{N_A = P}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore N_D \cdot L = N_C \cdot a \Rightarrow \boxed{N_D = P\frac{a}{L}\tan\alpha}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{at} = N_C - N_D \Rightarrow \boxed{F_{at} = P\tan\alpha\left(1-\frac{a}{L}\right)}$$

c) Lei de Coulomb:

$$|F_{at}| \le \mu N_A$$

$$P\tan\alpha\left(1-\frac{a}{L}\right) \le \mu P$$

$$\tan\alpha \le \frac{\mu}{1-\frac{a}{L}}$$

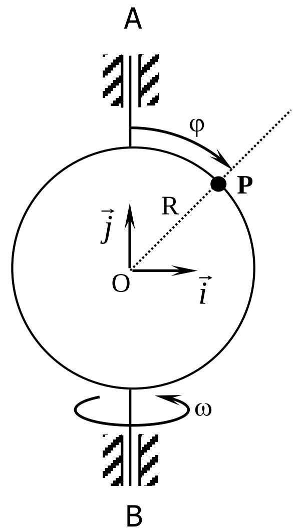
$$\boxed{\alpha_{máx} = \arctan\frac{\mu}{1-\frac{a}{L}}}$$

9) A circunferência da figura, de raio R, gira ao redor do eixo AB com velocidade angular $\omega\vec{j}$ constante. Um ponto P percorre a circunferência com velocidade relativa de módulo constante v. Determine para o ponto P, considerando como referencial móvel a circunferência e o sistema de coordenadas Oxyz (versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) ligado a ela, conforme indicado na figura:

a) a velocidade relativa $\vec{v}_{rel}$;

b) a velocidade de arrastamento $\vec{v}_{ar}$;

c) as acelerações relativa $\vec{a}_{rel}$, de arrastamento $\vec{a}_{ar}$, de coriolis $\vec{a}_{cor}$ e absoluta $\vec{a}$ em função de φ.



RESPOSTA:

OBS: Considere na resolução abaixo que $\theta = \varphi$

a) Decompondo v nas direções dos versores:

$\vec{v}_{rel} = v cos\theta\vec{i} - v sen\theta\vec{j}$

b)

$\vec{v}_{ar} = \vec{v}_{O,ar} + \vec{\omega} \wedge (P - O)$

$\vec{v}_{ar} = \vec{0} + \omega\vec{j} \wedge (R sen\theta\vec{i} + R cos\theta\vec{j})$

$\vec{v}_{ar} = -\omega R sen\theta\vec{k}$

c)

Derivando no movimento relativo e observando que $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$:

$$\vec{a}_{rel} = \dot{\vec{v}}_{rel} = -vsen\theta\dot{\theta}\vec{\imath} - vcos\theta\dot{\theta}\vec{\jmath} = -\frac{v^2}{R}(sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

Derivando no movimento de arrastamento:

$$\vec{a}_{ar} = \dot{\vec{v}}_{ar} = -\omega Rsen\theta\dot{\vec{k}}$$

$$\dot{\vec{k}} = \omega\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \omega\vec{\imath}$$

$$\vec{a}_{ar} = -\omega^2 Rsen\theta\vec{\imath}$$

A aceleração de Coriolis é dada por:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel} = 2\omega\vec{\jmath} \wedge (vcos\theta\vec{\imath} - vsen\theta\vec{\jmath}) = -2\omega vcos\theta\vec{k}$$

A aceleração absoluta é dada por:

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{ar} + \vec{a}_{cor}$$

$$a = -(\frac{v^2}{R}sen\theta + \omega^2 Rsen\theta)\vec{\imath} - \frac{v^2}{R}cos\theta\vec{\jmath} - 2\omega vcos\theta\vec{k}$$