Prova A

EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2017/2018
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2017/2018

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

04/06/2017

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: ______________________________________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **18 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página **18** é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

1) Seja $\beta = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva de V^3. Considere os vetores: $\vec{u} = (1,1,0)_\beta$ e $\vec{v} = (1,0,-1)_\beta$.

(a) Encontre todos os vetores $\vec{w}$ de módulo igual a 1, tais que $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ e o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{u}$ tenha medida igual a $150°$.

(b) Considere o triângulo ABC tal que $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \gamma\vec{v}$, em que $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Determine todos os valores de α e γ para que o triângulo ABC seja retângulo em C e tenha área igual a $\sqrt{3}$.

RESPOSTA:

(a)
Denotemos $\vec{w} = (a, b, c)_\beta$.
Como $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, temos $a - c = 0$.
De $\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| cos 150° = -\sqrt{6}/2 = a + b$.
Como $\|\vec{w}\| = 1 = a^2 + b^2 + c^2$, assim temos: $c = a, b = -a - \sqrt{6}/2$ e $a^2 + \left(-a - \sqrt{6}/2\right)^2 + a^2 = 1$.
Desta última equação vem: $6a^2 + 2\sqrt{6}\,a + 1 = 0$.
Donde $a = -\sqrt{6}/6$, e então $b = -\sqrt{6}/3$ e $c = -\sqrt{6}/6$.
Portanto $\vec{w} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)_\beta$.

(b)
Temos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \gamma\vec{v} - \alpha\vec{u}$.
Para que o triângulo seja retângulo em C devemos ter $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$,
ou seja, $\gamma\vec{v} \cdot (\gamma\vec{v} - \alpha\vec{u}) = 2\gamma^2 - \gamma\alpha = 0$.
Como ABC representa um triângulo, devemos ter $\gamma \neq 0$, portanto $\alpha = 2\gamma$.
A condição de que a área do triângulo ABC seja igual a $\sqrt{3}$ nos dá : $\|\overrightarrow{AC}\|[\![\overrightarrow{BC}]\!] = 2\sqrt{3}$, o que é equivalente a:
$\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.
Já que $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\gamma^2$ e $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\gamma\vec{v} - \alpha\vec{u}) \cdot (\gamma\vec{v} - \alpha\vec{u}) = 2\gamma^2 - 2\alpha\gamma + 2\alpha^2$,
temos: $2\gamma^2(2\gamma^2 - 2\alpha\gamma + 2\alpha^2) = 12$, ou $\gamma^2(\gamma^2 - \alpha\gamma + \alpha^2) = 3$.
Como $\alpha = 2\gamma$, temos $\gamma^2(\gamma^2 - 2\gamma^2 + 4\gamma^2) = 3$, assim $3\gamma^4 = 3$ e,
portanto, $\gamma = 1$ e $\alpha = 2$, ou $\gamma = -1$ e $\alpha = -2$.

2) Responda ao que se pede:

(a) Seja $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = (t^3 - t^2)(t^2 - 4)$ e a dimensão da imagem de T é igual a 3.
Prove que T é diagonalizável.

(b) Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas do $\mathbb{R}^4$ e do $\mathbb{R}^3$ é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ a & 0 & b & 4 \end{bmatrix}$.
Determine todos os valores de a e b de forma tal que a transformação T seja sobrejetora.

RESPOSTA:

(a)
As raízes do polinômio característico de T são os seus autovalores.
Como $p_T(t) = (t^3 - t^2)(t^2 - 4) = t^2(t-1)(t-2)(t+2)$, portanto os autovalores de T são: 0,1,2 e -2.
Já que todas as raízes de p_T são reais, para que T seja diagonalizável devemos ter as multiplicidades algébrica e geométrica iguais para cada um dos seus autovalores.
Os autovalores $1, 2$ e -2 têm multiplicidade algébrica igual a 1, pois são raízes simples de p_T.
Sabemos que $1 \leq$ multiplicidade geométrica $\leq$ multiplicidade algébrica para todo autovalor de T.
Portanto, para os autovalores $1, 2$ e -2, as suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.
Agora, o autovalor 0 tem multiplicidade algébrica igual a 2 e a sua multiplicidade geométrica é igual à dimensão do kernel de T.
O problema nos dá a dimensão da imagem de T.
Usando o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos: $\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^5$,
assim $\dim Ker(T) = 5 - 3 = 2$.
Portanto, também para o autovalor 0, as multiplicidades algébrica e geométrica são iguais e então T é diagonalizável.

(b)
A transformação T será sobrejetora se $Im(T) = \mathbb{R}^3$, o que é equivalente a $\dim Im(T) = 3$.
Os vetores coluna da matriz que representa T geram a sua imagem,
ou seja, $Im(T) = [(1,1,a), (-1,2,0), (0.-1,b), (1,0,4)]$.
Vamos estudar a dependência linear desses vetores usando a técnica do escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 3 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & -1 & 4-a \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a+3b \\ 0 & 0 & 4-a-b \end{pmatrix}$$

Donde concluímos que $\dim Im(T) < 3$ se e somente se $a + 3b = 0$ e $a + b = 4$, ou $a = 6$ e $b = -2$.
Assim $\dim \quad Im(T) = 3$ se e somente se $a \neq 6$ ou $b \neq -2$.

3) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Seja, ainda, W um subespaço próprio de V, isto é , $\{0\} \neq W \neq V$. Considere o operador linear $T: V \to V$ definido por:

$$T(v) = -v + 2\, proj_W(v),$$

para todo $v \in V$, em que $proj_W(v)$ indica a projeção ortogonal do vetor v no subespaço W.

(a) Verifique que -1 é um autovalor de T.

(b) Prove que $T^2 = I$, em que I indica o operador identidade e $T^2 = T \circ T$.

RESPOSTA:

(a)
Para que -1 seja um autovalor de T é necessário que exista um vetor não nulo, v_0, tal que $T(v_0) = -v_0$, ou seja, $-v_0 + 2proj_W(v_0) = -v_0$, ou ainda, $proj_W(v_0) = 0$.
Sabemos que $\{0\} \neq W \neq V$, então para o subespaço ortogonal a W, denominado por $W^{\perp}$, também vale $\{0\} \neq W^{\perp} \neq V$, já que V é um espaço vetorial de dimensão finita.
Então, se considerarmos um vetor $0 \neq v_0 \in W^{\perp}$, teremos $proj_W(v_0) = 0$, e assim esse vetor será um autovetor de T associado ao autovalor -1.

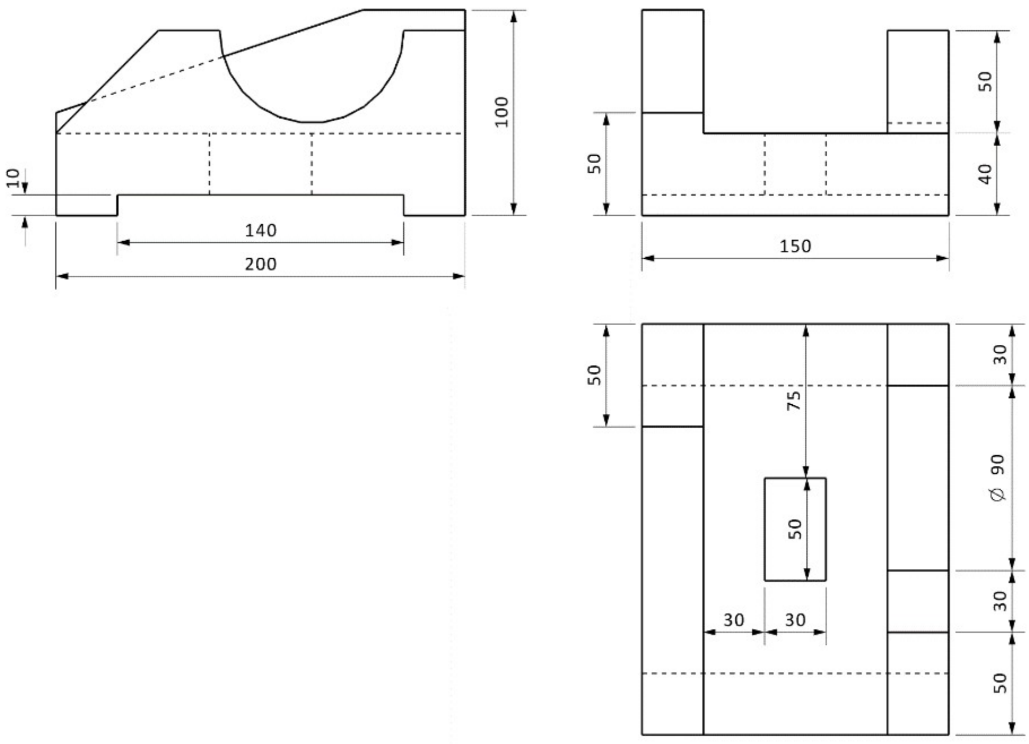
(b)
Seja $v \in V$.
Vamos lembrar da definição de projeção ortogonal que $proj_W(v) \in W$ e $-v + proj_W(v) \in W^{\perp}$.
Como vimos no item (a), se $w' \in W^{\perp}$, então $T(w') = -w'$.
Agora observemos que se $w \in W$, então $proj_W(w) = w$ e $T(w) = -w + 2w = w$.
Calculemos:

$$T^2(v) = T\big(T(v)\big) = T((-v + proj_W(v)) + proj_W(v)) = T\left(\underbrace{-v + proj_W}_{\in W^{\perp}}(v)\right) + T\left(\underbrace{proj_W(v)}_{\in W}\right) =$$

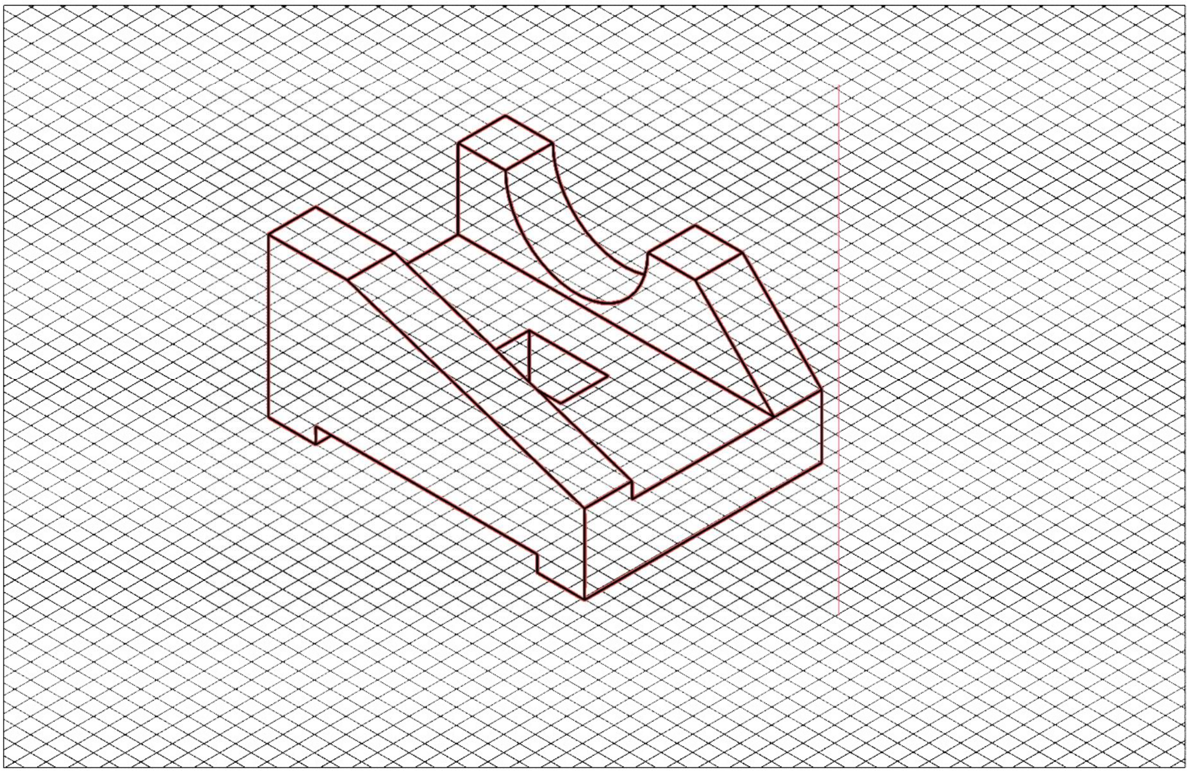
$$-\big(-v + proj_W(v)\big) + proj_W(v) = v,$$

assim $T^2 = I$.

4) Dadas as vistas de uma peça, desenhar na grade da página ao lado sua perspectiva isométrica, mostrando suas faces frontal, superior e lateral esquerda. Considerar cada divisão da grade igual a 10 unidades. Não é preciso mostrar arestas ocultas, nem cotar a perspectiva.

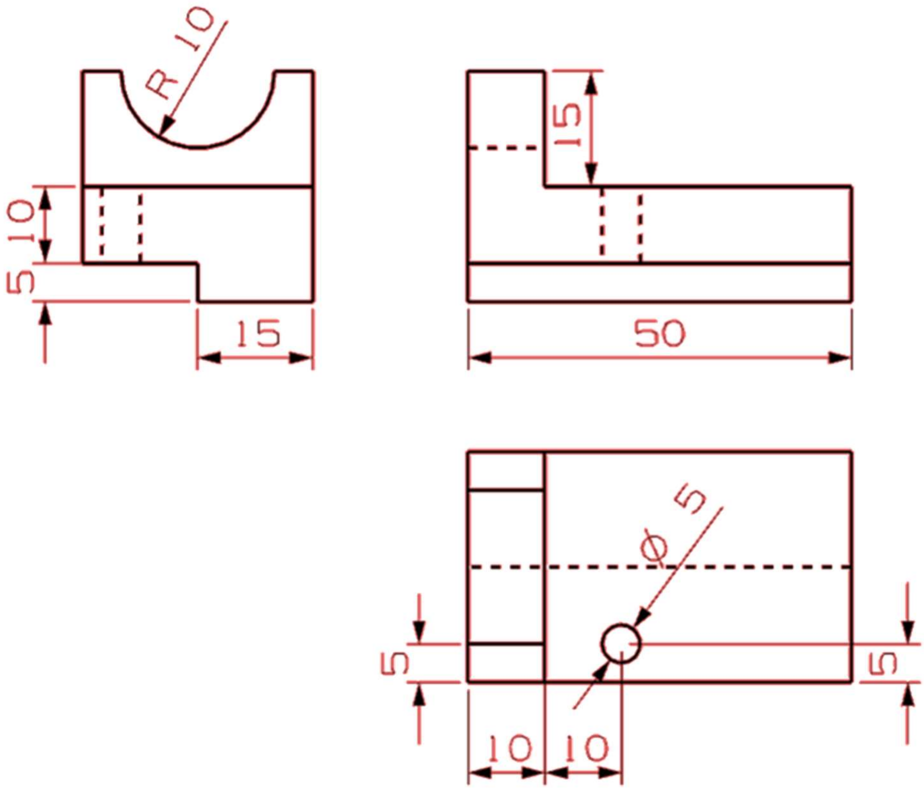


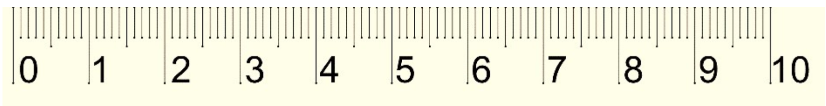
RESPOSTA:



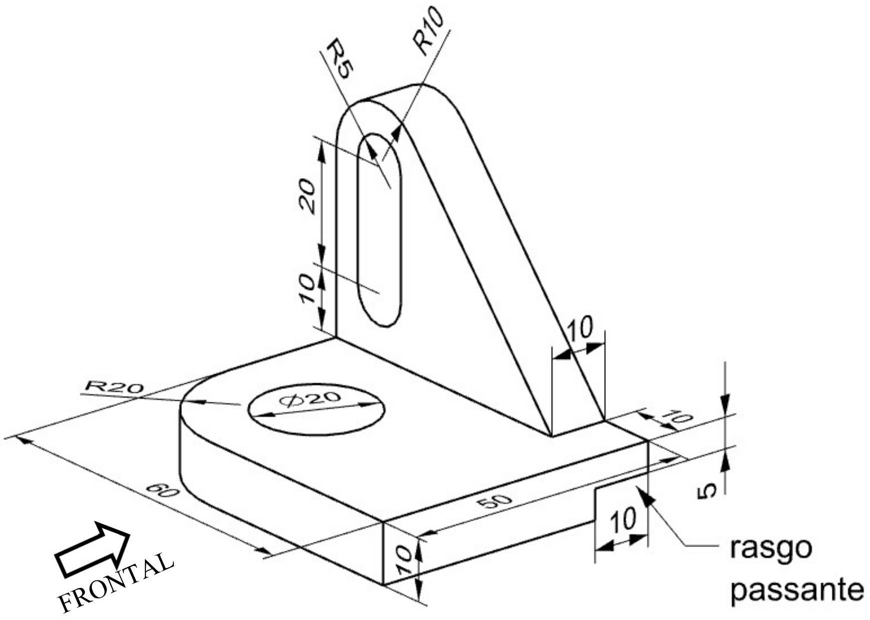
5) Cote as vistas dadas abaixo, medindo-as diretamente no desenho, em mm.

Sugestão: tome as medidas com seu compasso e meça-as na régua-referência impressa abaixo.

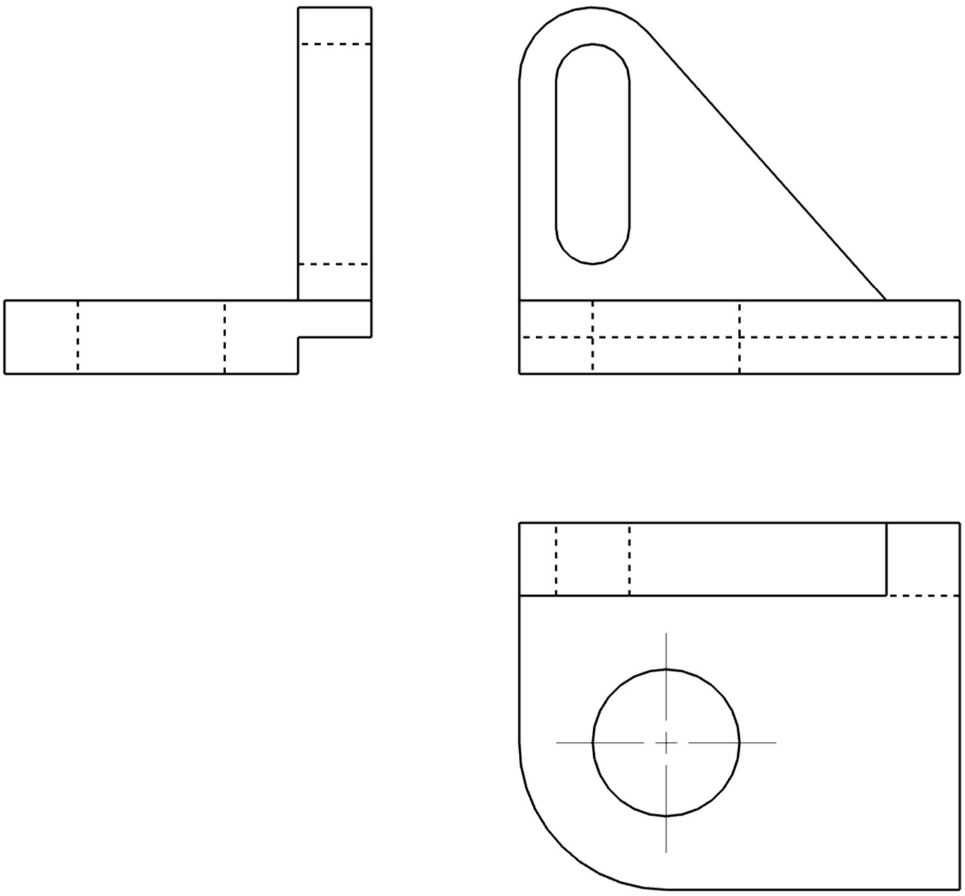




6) Desenhar as vistas frontal, superior e lateral direita da peça abaixo. Adotar 1º diedro. Face frontal indicada pela seta. Medidas em mm. Escala 1:1.



RESPOSTA:



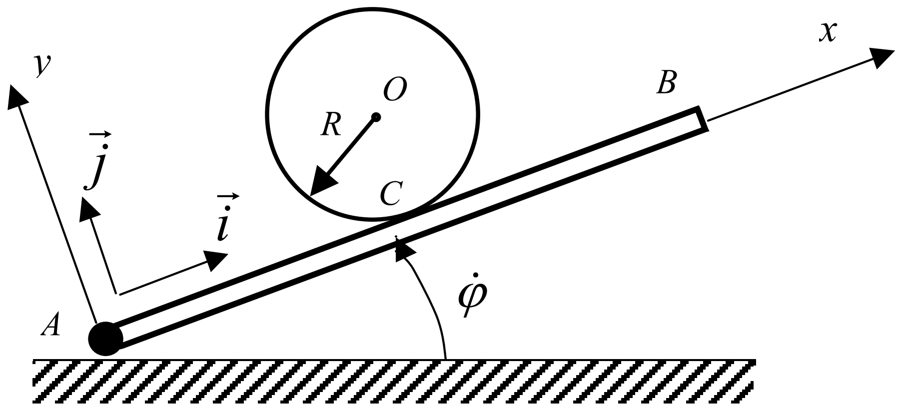
7) O disco de raio *R* rola sem escorregar sobre a barra *AB*; é dada a velocidade $\vec{v}_{O,r} = v\vec{i}$ (de módulo *v* constante) do centro *O* do disco em relação à barra. A barra *AB* gira ao redor da articulação *A* com velocidade angular $\dot{\varphi}$ constante. Adotando o sistema de coordenadas (*A,x,y,z*) solidário à barra, e sabendo que no instante $t = 0$ a coordenada *x* do ponto *O* é x_O, pede-se, para um instante *t* qualquer:

(a) a velocidade $\vec{v}_C$ do ponto de contato entre o disco e a barra;

(b) a velocidade $\vec{v}_O$ do centro do disco;

(c) a velocidade angular ω do disco;

(d) as acelerações dos pontos *O* e *C* do disco.



RESPOSTA:

(a)

$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (C - A); (C - A) = (x_O + vt)\vec{i} \rightarrow \vec{v}_C = \dot{\varphi}(x_O + vt)\vec{j}$$

(b)

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{O,r} + \vec{v}_{O,a}; \vec{v}_{O,r} = v\vec{i}; \vec{v}_{O,a} = \vec{v}_C + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \underbrace{(O - C)}_{R\vec{j}} \rightarrow \vec{v}_{O,a} = \dot{\varphi}(x_O + vt)\vec{j} - \dot{\varphi}R\vec{i}.$$

$$\therefore \vec{v}_O = (v - \dot{\varphi}R)\vec{i} + \dot{\varphi}(x_O + vt)\vec{j}$$

(c)

$$\vec{v}_{O,r} = v\vec{i} = \omega_{rel}\vec{k} \wedge (O-C) \rightarrow \vec{\omega}_{rel} = -\frac{v}{R}\vec{k};$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \rightarrow \vec{\omega} = \left(\dot{\varphi} - \frac{v}{R}\right)\vec{k} \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} - \frac{v}{R}$$

(d)

$$\vec{a}_O = \vec{a}_{O,r} + \vec{a}_{O,a} + \vec{a}_{O,c}; \vec{a}_{O,r} = \vec{0}; \vec{a}_{O,a} = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left[\dot{\varphi}\vec{k} \wedge (O-A)\right] \rightarrow; \vec{a}_{O,a} = -\dot{\varphi}^2\left[(x_O + vt)\vec{i} + R\vec{j}\right];$$

$$\vec{a}_{O,c} = 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge v\vec{i} \rightarrow \vec{a}_{O,c} = 2\dot{\varphi}v\vec{j}; \therefore \vec{a}_O = -\dot{\varphi}^2(x_O + vt)\vec{i} + \left(2\dot{\varphi}v - \dot{\varphi}^2 R\right)\vec{j};$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (C-O)\right] \rightarrow \vec{a}_C = -\dot{\varphi}^2(x_O + vt)\vec{i} + \frac{v^2}{R}\vec{j}.$$

8) O disco de centro *O* e raio *r* gira em torno da peça *OB* com velocidade angular constante $\omega_1 = \dot{\theta}$. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal *AC*, com velocidade angular constante $\omega_2 = \dot{\phi}$.

Considere a peça *OB* como o referencial móvel, ao qual é solidário o sistema cartesiano *Bxyz*.

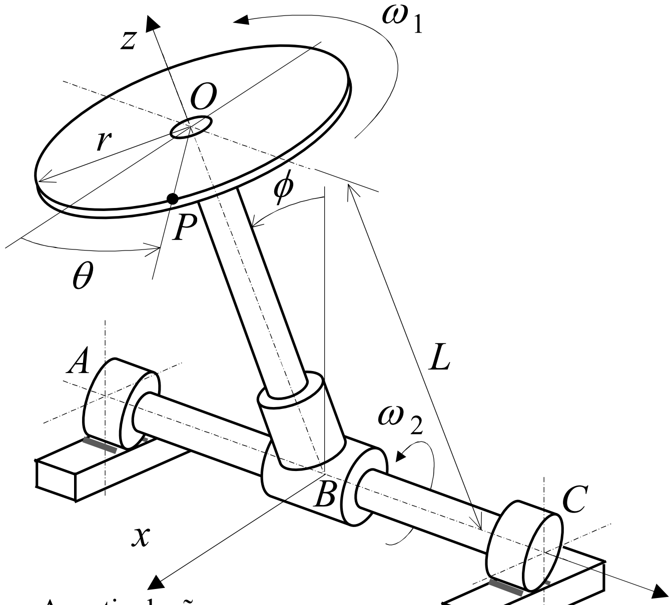
Na posição da figura, dada pelos ângulos (ϕ, θ), e expressando os resultados na base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ associada ao sistema cartesiano, pede-se:

a) o vetor de rotação $\vec{\Omega}_a$ da peça *OB* e o vetor de rotação $\vec{\Omega}_D$ do disco;

b) a velocidade $\vec{v}$ do ponto *P*, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{v}_a$ e relativa $\vec{v}_r$;

c) A aceleração $\vec{a}$ do ponto *P*, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{a}_a$, relativa $\vec{a}_r$ e complementar $\vec{a}_c$;

d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}_D$ do disco de centro *O*.



RESPOSTA:

(a)

$\boxed{\vec{\Omega}_a = \dot{\phi}\vec{j}}$; $\boxed{\vec{\Omega}_D = \dot{\phi}\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k}}$

(b)

$\vec{v}_r = \vec{v}_{O,r} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (P-O) = \dot{\theta}\vec{k} \wedge r(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = \dot{\theta}r(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})}$

$\vec{v}_a = \vec{v}_{B,a} + \dot{\phi}\vec{j} \wedge (P-B) = \dot{\phi}\vec{j} \wedge \left[r(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}) + L\vec{k}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{\phi}(L\vec{i} - r\cos\theta\vec{k})}$

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (\dot{\phi}L - \dot{\theta}r\operatorname{sen}\theta)\vec{i} + \dot{\theta}r\cos\theta\vec{j} - \dot{\phi}r\cos\theta\vec{k}}$

(c)

$\vec{a}_r = \vec{a}_{O,r} + \ddot{\theta}\vec{k} \wedge (P-O) + \dot{\theta}\vec{k} \wedge \left[\dot{\theta}\vec{k} \wedge (P-O)\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = -\dot{\theta}^2 r(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j})}$ $\vec{a}_{P,r} = \vec{a}_{O,r} + \ddot{\theta}\vec{k} \wedge (P-O) + \dot{\theta}\vec{k} \wedge \left[\dot{\theta}\vec{k} \wedge (P-O)\right] = -\dot{\theta}^2 r(\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{\imath})$

$\vec{a}_a = \vec{a}_{B,a} + \ddot{\phi}\vec{j} \wedge (P-B) + \dot{\phi}\vec{j} \wedge \left[\dot{\phi}\vec{j} \wedge (P-B)\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = -\dot{\phi}^2(r\cos\theta\vec{i} + L\vec{k})}$

$\vec{a}_c = 2\dot{\phi}\vec{j} \wedge \dot{\theta}r(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{\phi}\dot{\theta}r\operatorname{sen}\theta\vec{k}}$

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)r\cos\theta\vec{i} - \dot{\theta}^2 r\operatorname{sen}\theta\vec{j} + (2\dot{\phi}\dot{\theta}r\operatorname{sen}\theta - \dot{\phi}^2 L)\vec{k}}$

(d)

$\vec{\alpha}_D = \dot{\phi}\dot{\vec{j}} + \dot{\theta}\dot{\vec{k}} = \dot{\phi}(\dot{\phi}\vec{j} \wedge \vec{j}) + \dot{\theta}(\dot{\phi}\vec{j} \wedge \vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_D = \dot{\theta}\dot{\phi}\vec{i}}$

9) No sistema mostrado na figura, o disco de centro *C* tem massa *m* e raio *R* e há, ainda, uma massa concentrada *m* no ponto *B*. A distância entre os pontos *B* e *C* é *R*/2. O sistema encontra-se inicialmente em repouso, suspenso pelo fio *DE* e pela barra fixa *OA*, articulada ao disco em *A*. Num dado instante, o fio *DE* se rompe. Para o instante imediatamente após o rompimento do fio e considerando-se o sistema de coordenadas *Axyz*, pede-se:

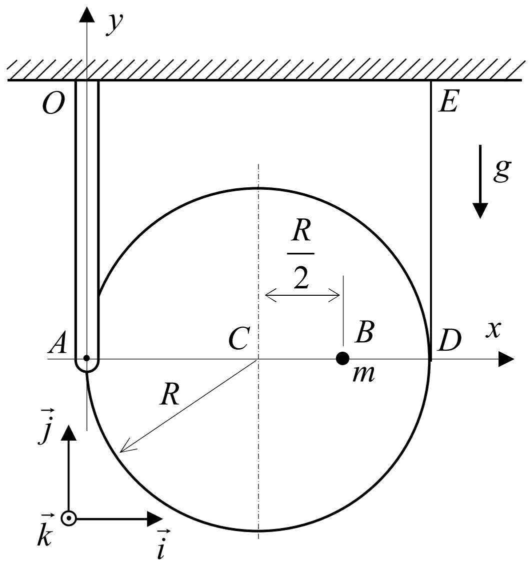
(a) As coordenadas do centro de massa do sistema composto pelo disco e pela massa concentrada;

(b) O momento de inércia do sistema composto pelo disco e pela massa concentrada em relação ao eixo *Az*;

(c) A aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco;

(d) As reações vinculares em *A*.

Dado: para o disco $J_{z_C} = \frac{mR^2}{2}$



RESPOSTA:

(a)

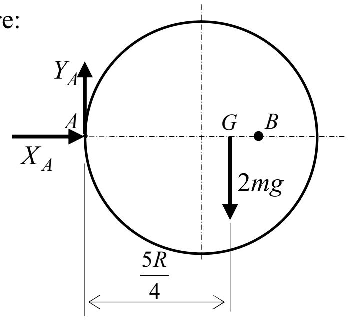
Por simetria, $\boxed{y_G = 0}$ e, como o sistema é plano, $\boxed{z_G = 0}$

$(m+m)x_G = mR + m\frac{3R}{2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{5R}{4}}$

(b)

$$J_{z_A} = J_{z_{A\,Disco}} + J_{z_{A\,Massa}} \Rightarrow J_{z_A} = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right) + m\left(\frac{3R}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{J_{z_A} = \frac{15}{4}mR^2}$$

(c) Diagrama de corpo livre:



Teorema da quantidade de movimento angular para o sistema disco + massa concentrada, polo A

$$\frac{d}{dt}([I_A]\{\omega\}) + m(G-A)\wedge\vec{a}_A = \vec{M}_A$$, em que $\vec{a}_A = \vec{0}$

$$\Rightarrow J_{z_A}\dot{\omega}\,\vec{k} = \vec{M}_A \Rightarrow \frac{15}{4}mR^2\dot{\omega} = -2mg\frac{5R}{4}$$, e como $\vec{\alpha} = \dot{\omega}\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = -\frac{2g}{3R}\vec{k}}$

(d)

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\wedge(G-A) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)]$$, em que $\vec{a}_A = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\Rightarrow \vec{a}_G = -\frac{5g}{6}\vec{j}$

Teorema do movimento do baricentro para o sistema disco + massa concentrada:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 2ma_{G_x} \Rightarrow X_A = 2m0 \\ \Sigma F_y = 2ma_{G_y} \Rightarrow Y_A - 2mg = 2m\left(-\frac{5g}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{X_A = 0} \text{ e } \boxed{Y_A = \frac{1}{3}mg}$$