EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2016/2017
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2016/2017

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

05/06/2016

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: ____________________________________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **20 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página 20 é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **14h30min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

1) Seja $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3, em que $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal positiva de V^3.

(a) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo tais que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ e a mediana relativa ao vértice B está contida na reta $r\colon \frac{x+1}{2} = 1 - y = z$. Sabendo-se que $A = (1,2,3)_\Sigma$, determine as coordenadas do vértice C.

(b) Considere os planos: $\pi_1\colon x + y + 3z = 1$ e $\pi_2\colon x - z = 1$, e a reta $r\colon X = (3,1,2) + \lambda\,(2,1,2), \lambda \in \mathbb{R}$. Determine a posição relativa entre $\pi_1 \cap \pi_2$ e r.

OBS: $\|\vec{x}\|$ denota o módulo do vetor $\vec{x}$.

RESPOSTA:

(a)
Vamos chamar de M o ponto interseção da reta r com o lado AC do triângulo. Esse é o ponto médio desse lado e tem coordenadas $M = (1 - 2y, y, 1 - y)_\Sigma$. A reta determinada por AM e a reta r são perpendiculares, pois o triângulo dado é isósceles em B.

Portanto, os vetores $\overrightarrow{AM} = (-2y, y - 2, -2 - y)$ e $\vec{r} = (-2,1,-1)$, vetor diretor da reta r, são ortogonais.

Assim, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{r} = 6y = 0$.

Então, $C = A + 2\overrightarrow{AM} = (1,-2,-1)_\Sigma$.

(b)
A reta $\pi_1 \cap \pi_2$ tem uma equação vetorial $X = (0,4,-1) + x(1,-4,1), x \in \mathbb{R}$, o que já nos diz que essas retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos.

Para decidirmos se as retas são concorrentes ou reversas, vamos resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ 4 - 4x = 1 + \lambda \\ -1 + x = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x - 2\lambda = 3 \\ -4x - \lambda = -3. \\ x - 2\lambda = 3 \end{cases}$$

Usando o escalonamento da matriz do sistema, temos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Então, $x = 1, \lambda = -1$.

Sendo o sistema possível e determinado, concluímos que as retas são concorrentes no ponto de coordenadas: $(1,0,0)_\Sigma$.

2) Considere $T: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um operador linear cujo polinômio característico é: $p_T(X) = (X-1)^2(X-3)$.

(a) Supondo que $\mathbb{R}^3 = V(1) \oplus V(3)$, mostre que T é diagonalizável.

(b) Considere, em $\mathbb{R}^3$, o produto interno usual $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = ax + by + cz$ para todos $(x,y,z),(a,b,c)$ em $\mathbb{R}^3$. Suponha que o operador linear T seja simétrico e que $V(1) = [(1,0,2)),(2,1,0)]$. Determine uma base de $V(3)$.

OBS: $V(\lambda)$ denota o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pelos autovetores de T associados ao autovalor λ.

RESPOSTA:

(a)
As raízes do polinômio característico de T são 1 e 3, e esses são os autovalores de T. O autovalor 1 tem multiplicidade algébrica igual a 2, e o autovalor 3 tem multiplicidade algébrica igual a1. Como sabemos que $1 \leq$ *multiplicidade geométrica* $\leq$ *multiplicidade algébrica de um autovalor*, concluímos que $1 = dimV(3)$ = multiplicidade geométrica de 3.

Para que T seja diagonalizável, precisamos que a multiplicidade geométrica do autovalor 1 também seja igual à sua multiplicidade algébrica, que é 2.

Pela hipótese, temos que $3 = dim\mathbb{R}^3 = \dim V(1) + dimV(3)$.

Como vimos acima que $dimV(3) = 1$, temos que $\dim V(1) = 2$, como queríamos.

(b)
Pela hipótese de T ser um operador simétrico, sabemos que os subespaços $V(1)$ e $V(3)$ são ortogonais., ou seja, $V(3) = V(1)^{\perp}$.

Seja $(x,y,z) \in V(3)$, então $\langle (x,y,z),(1,0,2)\rangle = x + 2z = 0$ e $\langle (x,y,z),(2,1,0)\rangle = 2x + y = 0$.

Assim, $x = -2z$ e $y = -2x = 4z$.

Portanto, $V(3) = \{(-2z, 4z, z): z \in \mathbb{R}\}$ e uma base para $V(3)$ é $\{(-2,4,1)\}$.

3) Em $\mathbb{R}^3$, considere o produto interno usual, <(x,y,z),(a,b,c)>=ax+by+cz, para todos (x,y,z), (a,b,c) em $\mathbb{R}^3$. Sejam $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$ subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal em S.

(a) Determine todos o vetores (x,y,z) tais que $T(x,y,z) = (1,1,0)$.

(b) Exiba uma base do *kernel* de T.

(c) Encontre uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

RESPOSTA:

(a)
Pela definição de projeção ortogonal, temos $(x,y,z) - T(x,y,z) \in S^{\perp}$.

Sabemos que $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^3$, então $dimS + dimS^{\perp} = 3$. Como $dimS = 2$, devemos ter $\dim S^{\perp} = 1$, mas S representa um plano com um vetor normal, $n = (1,-1,2)$. Assim, $S^{\perp} = [(1,-1,2)]$.

Sendo $T(x,y,z) = (1,1,0)$, então $(x,y,z) - (1,1,0) = \alpha(1,-1,2), \alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, $(x,y,z) = (1,1,0) + \alpha(1,-1,2), \alpha \in \mathbb{R}$.

(b)
Como T é a projeção ortogonal em S , a imagem de T é o próprio subespaço S, que representa um plano e tem dimensão igual a 2.

Pelo teorema do Núcleo e da Imagem, temos $3 = dim\mathbb{R}^3 = dimS + \dim Ker(T)$.

Então, $\dim Ker(T) = 1$.

Pela definição de vetor normal a um plano, e de projeção ortogonal, todos os vetores normais a S estão no $Ker(T)$.

Portanto, uma base de $Ker(T)$ é $\{(1,-1,2)\}$.

(c)
Observemos que se $(a,b,c) \in S$, então $T(a,b,c) = (a,b,c)$, pela definição de projeção ortogonal.

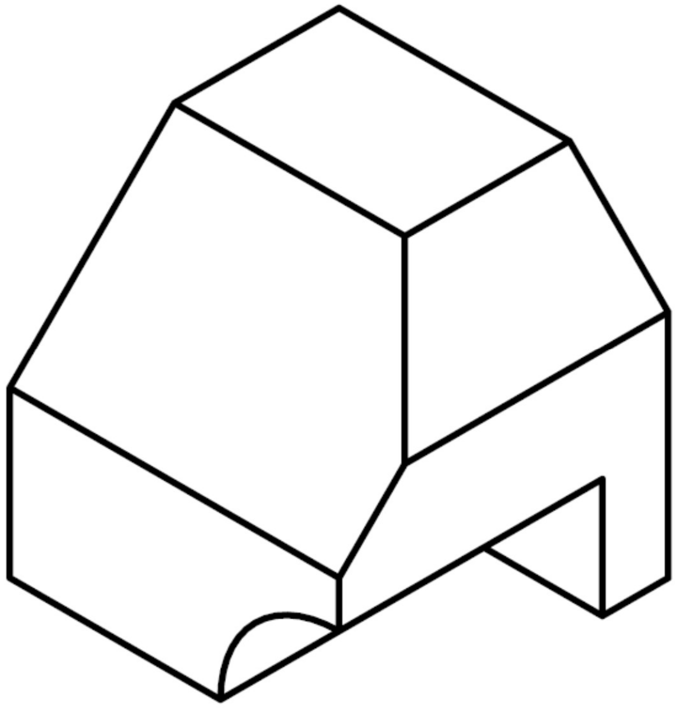
Assim, todos os vetores de S são autovetores de T associados ao autovalor 1.

Em particular, para os vetores da base de S: $\{(1,1,0), (2,0,-1)\}$.

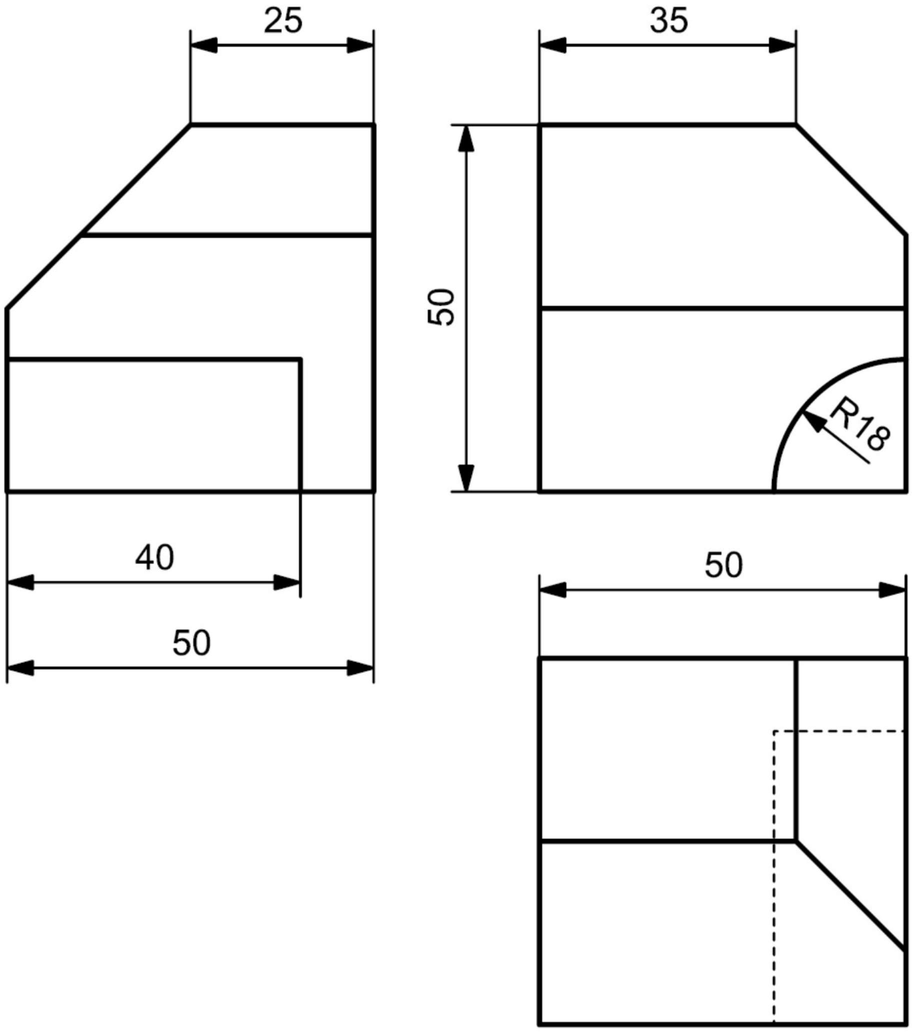
Como visto no item (b), $T(1,-1,2) = (0,0,0)$ e $(1,-1,2) \in S^{\perp}$.

Do fato de $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^{\perp}$, temos que $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (2,0,-1), (1,-1,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

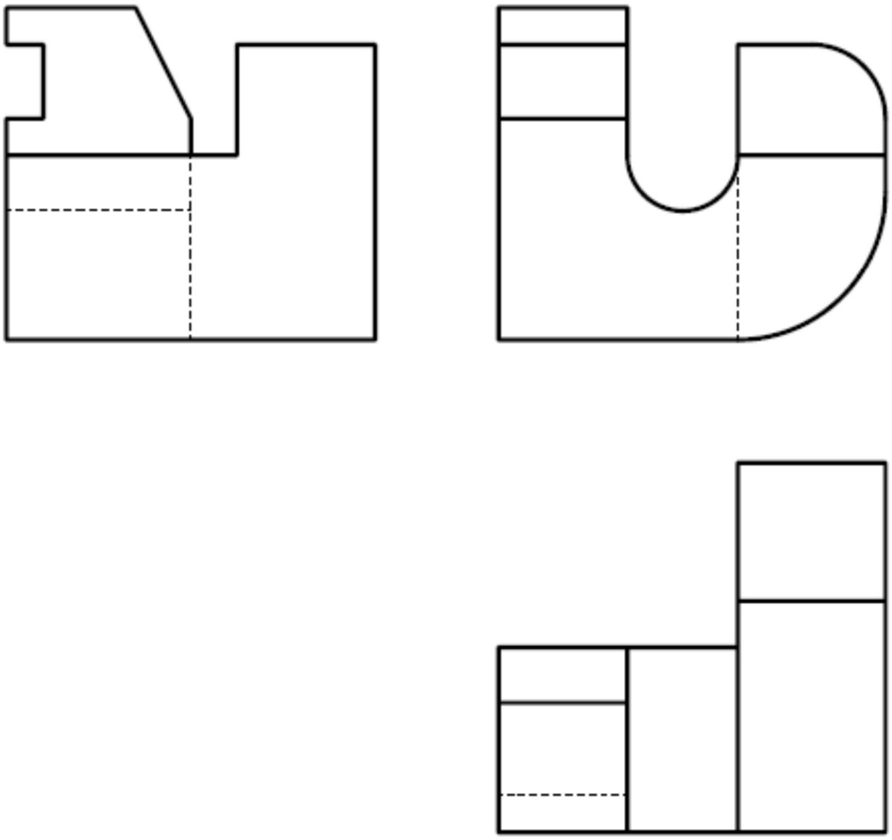
4) Dada abaixo a perspectiva isométrica (simplificada) de uma peça em escala natural, desenhar na página ao lado suas vistas frontal (aquela com o detalhe curvo), lateral direita e superior, no primeiro diedro, em escala 1:1. Cotar as vistas com medidas em milímetros.



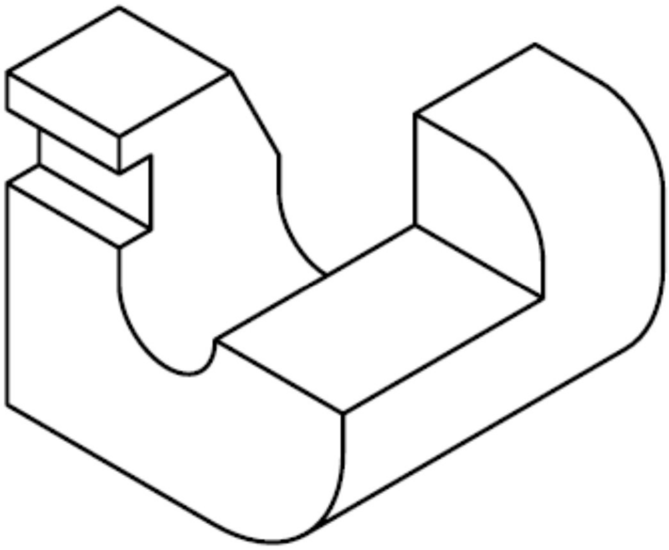
RESPOSTA:



5) Dadas as vistas ortográficas da peça abaixo, desenhar sua perspectiva isométrica, mostrando as faces frontal, superior e lateral direita.



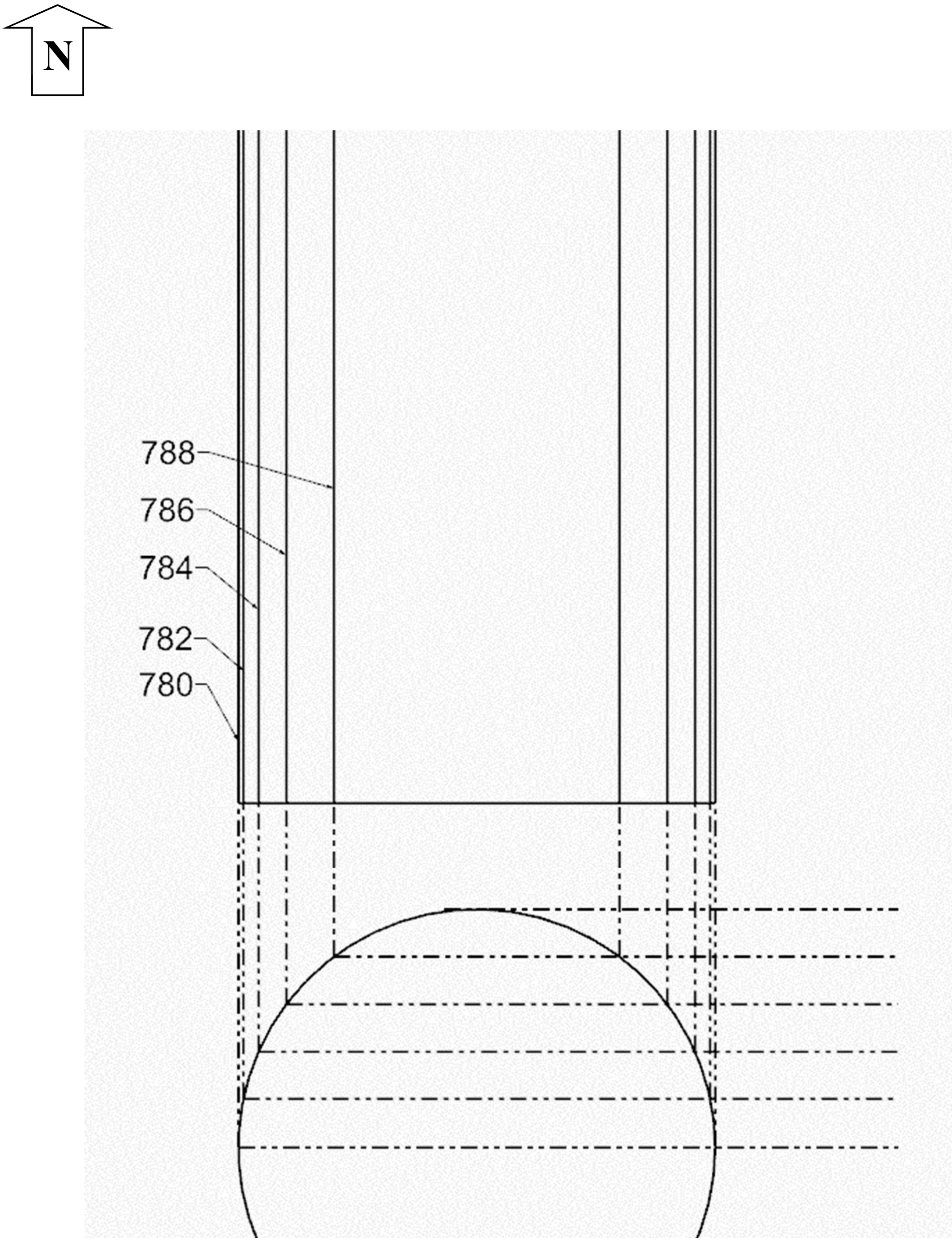
RESPOSTA:



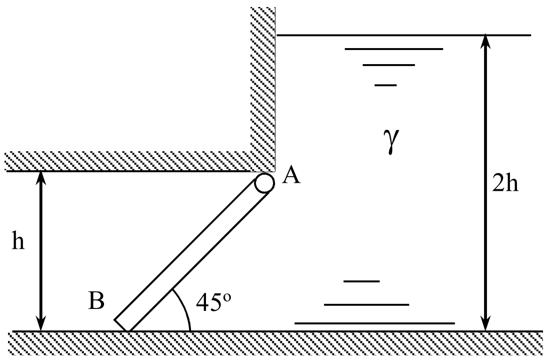
6) Imagine um túnel cilíndrico horizontal na cota 780m, com boca em arco de exatos 180 graus, largura de 20m e comprimento de 100m, perfeitamente alinhado à direção Norte-Sul. Desenhe abaixo as curvas de nível de 2m em 2m deste túnel, em escala 1:100.

RESPOSTA:

Escala 1:100

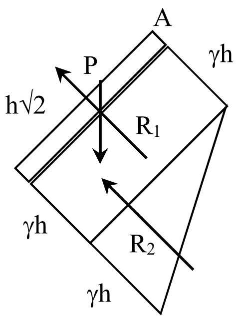


7) A comporta AB está articulada em A e tem largura b. A comporta represa um fluido com peso específico γ e altura 2h, conforme mostrado na figura. Determine o peso mínimo que a comporta deve ter para permanecer fechada.



RESPOSTA:

O diagrama de pressões está mostrado na figura abaixo:



As forças de pressão podem ser decompostas em:

$$R_1 = \gamma b h^2 \sqrt{2}$$

$$R_2 = \gamma b h^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para a comporta permanecer fechada, o momento em relação ao ponto A (e em relação a qualquer outro ponto) deve ser nulo:

$$P\frac{h}{2} = \gamma b h^2 \sqrt{2}.h\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\gamma b h^2 \sqrt{2}}{2}.h\frac{\sqrt{2}}{3}$$

e, portanto,

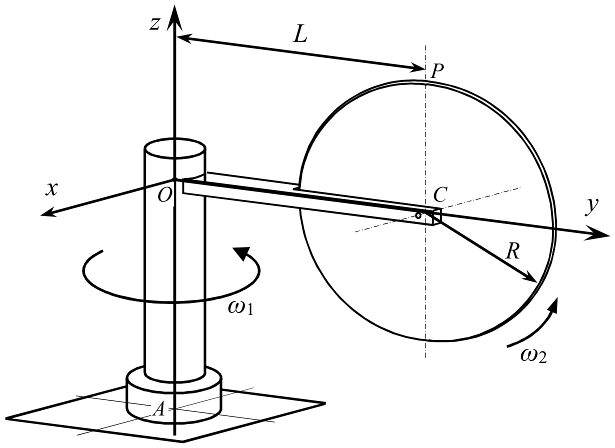
$$P = \frac{8}{3}\gamma b h^2$$

8) No mecanismo mostrado na figura, o segmento $\overline{OA}$ é fixo, e a barra *OC*, de comprimento *L* e perpendicular a $\overline{OA}$, possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. O disco, de centro *C* e raio *R*, contido no plano Oyz, possui um vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ em relação à barra *OC*, sendo ω_2 constante. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo na barra *OC*. Considerando a barra *OC* como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, quando $\overline{CP}$ é paralelo ao eixo *Oz*, determine:

(a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto *P*;

(b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto *P*;

(c) o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{D,abs}$) do disco.



RESPOSTA:

(a)

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C) = \vec{0} + \omega_2 \vec{i} \wedge R\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} == -\omega_2 R\vec{j}}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \left(L\vec{j} + R\vec{k}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega_1 L\vec{i}}$$

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = -\omega_1 L\vec{i} - \omega_2 R\vec{j}}$$

(b)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P-C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge \left[\vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C)\right]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_2 \vec{i} \wedge \left[\omega_2 \vec{i} \wedge R\vec{k}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_2^2 R\vec{k}}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O)\right]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \left[\omega_1 \vec{k} \wedge (L\vec{j} + R\vec{k})\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\omega_1^2 L\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \left(-\omega_2 R\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_1 \omega_2 R\vec{i}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,abs} = 2\omega_1 \omega_2 R\vec{i} - \omega_1^2 L\vec{j} - \omega_2^2 R\vec{k}}$$

(c)

$$\vec{\omega}_{D,abs} = \vec{\omega}_{D,rel} + \vec{\omega}_{D,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{D,abs} = \omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{i}}$$

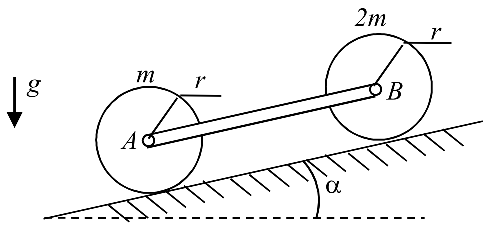
$$\vec{\alpha}_{D,abs} = \vec{\alpha}_{D,rel} + \vec{\alpha}_{D,arr} + \vec{\omega}_{D,arr} \wedge \vec{\omega}_{D,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{D,abs} = \omega_1 \omega_2 \vec{j}}$$

9) Os discos homogêneos de centros *A* e *B*, raios iguais a *r* e massas $m_A = m$ e $m_B = 2m$, respectivamente, estão ligados entre si por uma barra *AB* de massa desprezível, conforme indicado na figura. Sabendo que os discos rolam sem escorregar, descendo uma rampa que faz um ângulo α com a horizontal, pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre dos discos de centros *A* e *B* ;

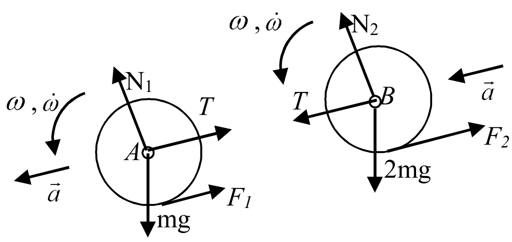
b) as forças de atrito atuantes nos discos de centros *A* e *B* ;

c) a força atuante na barra *AB* .



RESPOSTA:

(a)



(b)

Para o disco de centro *A*, tem-se:

$$-F_1 - T + mg\sin\alpha = ma_1 \qquad (1)$$

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$F_1 \cdot r = J_{Az}\dot{\omega} = \frac{mr^2}{2}\dot{\omega} \Rightarrow F_1 = \frac{mr}{2}\dot{\omega} \qquad (3)$$

Para o disco de centro *B*, tem-se:

$$-F_2 + T + 2mg\sin\alpha = 2ma_2 \tag{4}$$

$$N_2 - 2mg\cos\alpha = 0 \tag{5}$$

$$F_2 \cdot r = J_{Bz}\dot{\omega} = \frac{2mr^2}{2}\dot{\omega} \Rightarrow F_2 = mr\dot{\omega} \tag{6}$$

Além disso, as equações vinculares da Cinemática fornecem:

$$a_1 = a_2 = a = \dot{\omega}r \tag{7}$$

Substituindo-se (7) e (3) em (1), e (7) e (6) em (2), obtêm-se:

$$-\frac{mr}{2}\dot{\omega} - T + mg\sin\alpha = m\dot{\omega}r \Rightarrow \frac{3mr}{2}\dot{\omega} = -T + mg\sin\alpha \tag{8}$$

$$-mr\dot{\omega} + T + 2mg\sin\alpha = 2m\dot{\omega}r \Rightarrow 3m\dot{\omega}r = T + 2mg\sin\alpha \tag{9}$$

Adicionando-se (8) e (9), resulta:

$$\left(\frac{3mr}{2} + 3mr\right)\dot{\omega} = 3mg\sin\alpha \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2g\sin\alpha}{3r} \tag{10}$$

Substituindo-se (10) em (9) obtém-se:

$$3mr\frac{2g\sin\alpha}{3r} = T + 2mg\sin\alpha \Rightarrow T = 0$$

(c)

Substituindo-se (10) em (3) e em (6), obtêm-se:

$$F_1 = \frac{mr}{2}\frac{2g\sin\alpha}{3r} \Rightarrow F_1 = \frac{mg\sin\alpha}{3}$$

$$F_2 = mr\frac{2g\sin\alpha}{3r} \Rightarrow F_2 = \frac{2mg\sin\alpha}{3}$$